UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MÁRCIO PALMARES PINTO DE FRANÇA

LEMA DE YONEDA
UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DE CATEGORIAS
(GUIA AUXILIAR PARA INICIANTES)

CURITIBA

2018

MÁRCIO PALMARES PINTO DE FRANÇA

LEMA DE YONEDA
UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DE CATEGORIAS
(GUIA AUXILIAR PARA INICIANTES)

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática, Curso de Licenciatura em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Profa. Dra. Heily Wagner

CURITIBA

2018

F814l França, Márcio Palmares Pinto de

Lema de Yoneda: uma introdução à teoria de categorias (guia auxiliar para iniciantes). / Márcio Palmares Pinto de França. – Curitiba, 2018.
140 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas.

Orientadora: Profa. Dra. Heily Wagner

1. Categorias (Matemática). 2. Teorema de Cayley. I. Universidade Federal do Paraná. II. Wagner, Heily. III. Título.

CDD 511.322

TERMO DE APROVAÇÃO

MÁRCIO PALMARES PINTO DE FRANÇA

LEMA DE YONEDA
UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DE CATEGORIAS
(GUIA AUXILIAR PARA INICIANTES)

Trabalho apresentado como requisito parcial para a aprovação na disciplina TCC II do curso de Licenciatura em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Heily Wagner.

Profa. Dra. Heily Wagner
Orientadora

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves

Curitiba, 09 de Julho de 2018.

Dedicado à minha esposa e companheira Natália.
Que o apoio inestimável, o amor e o carinho
que dela recebi ao longo dos anos
possam estar refletidos nas eventuais qualidades desse trabalho.

AGRADECIMENTOS

Este texto é o resultado de quatro semestres de estudos, três deles sob orientação direta da professora Heily Wagner. Devo agradecê-la, em primeiro lugar, por sua paciência infinita! (Um aluno mais esperto teria vencido esses conteúdos em menos tempo!) Por outro lado, os profissionais da Álgebra aprendem Teoria de Categorias em capítulos de livros de álgebra avançada ou álgebra homológica. Para eles, é como aprender mais um idioma depois de já dominar três ou quatro. Não é algo que ofereça dificuldades. Assim, o primeiro texto que recebi da professora Heily para estudar foi o capítulo introdutório, "Noções Básicas", do conhecido trabalho de Valente Santiago Vargas intitulado "Elementos de Álgebra Homológica em Categorias Abelianas e o Teorema de Imersão na categoria dos grupos abelianos". Mesmo as "Noções Básicas" eram ininteligíveis para mim! Não entendi patavina. Por isso, fiz uma pesquisa e descobri o livro "Matemática Conceitual" de William Lawvere e Stephen Schanuel e propus que o adotássemos. Com um senso de humor sempre renovado, além da paciência infinita já mencionada, a professora Heily me acompanhou então em cada um dos exemplos e exercícios das três primeiras partes deste livro, desde os mais modestos problemas de composição de funções até os temas mais interessantes, como a demonstração do Teorema de Ponto Fixo de Brouwer, entre vários outros. Este trabalho sistemático, exemplo a exemplo, exercício a exercício, foi o que me permitiu formar a base necessária para compreender, depois, temas mais abstratos. Devo agradecimentos a ela também pelo interessante método de orientação a que fui submetido. Tínhamos uma reunião semanal em que eu apresentava, na forma de um quase-seminário, as coisas que havia estudado entre um encontro e outro. Quando somos obrigados a falar e a escrever diante de uma observação crítica minuciosa, frequentemente parte do que acreditamos estar correto revela-se falso! Expor o que julgamos saber e ser submetidos à crítica é uma característica essencial do processo que conduz à evolução do conhecimento científico. Só posso agradecer à professora Heily por todo esse aprendizado e torcer para que outros estudantes tenham a mesma oportunidade que eu tive.

Agradeço também a todas as professoras e professores que tive durante a graduação! Em particular, devo agradecimentos especiais a (citados na ordem em que os conheci)

Aurélio Sartorelli
Elizabeth Wegner Karas
José Carlos Cifuentes Vásquez
Carlos Henrique dos Santos
Marcelo Muniz Silva Alves

não apenas por terem me ensinado praticamente tudo o que sei, mas por seu exemplo de integridade, dedicação plena e apaixonada a este nobre ofício de ensinar, tão desvalorizado em nosso país. Quando a escuridão e o mar revolto nos pareciam obstáculos intransponíveis, o exemplo de cada um deles, para mim e para muitos outros estudantes, foi sempre como um farol, cuja luz continuava a guiar nossas esperanças.

Agradeço ainda ao professor Edson Ribeiro Alvares, que permitiu que eu participasse como café-com-leite em sua disciplina de Teoria de Categorias, ofertada para estudantes avançados do bacharelado (não precisei aprender os difíceis problemas envolvendo categorias de módulos e os seminários que apresentei foram de temas do meu TCC, que eu mesmo escolhi!). Ao professor Adonai Sant'Anna, pela indicação do surpreendente livro de Teoria de Categorias escrito por Robert Geroch (que eu jamais teria descoberto sozinho, porque se chama *Mathematical Physics*); ao professor Eduardo Hoefel, pelo trabalho realizado em uma disciplina optativa com o livro *Knots and Surfaces*, de David Farmer e Theodore Stanford (onde podemos aprender, entre outras coisas, Teoria de Grafos sob a perspectiva da Topologia); e ao professor Emílio Eiji Kavamura, por seu excelente curso de LATEX, por sua ajuda desinteressada e atenciosa, e por disponibilizar o incrível *template* usado para gerar este documento[1].

Devo agradecimentos redobrados ao meu professor de Álgebra, Marcelo Muniz Silva Alves, por sua leitura atenta, correções e sugestões diversas apresentadas para as duas versões desse trabalho. E ao professor José Carlos Cifuentes Vásquez, pelos ensinamentos sobre Lógica, Filosofia e Epistemologia da Matemática.

Finalmente, agradeço aos meus pais, pelo esforço de uma vida que fizeram para que eu e meus irmãos pudéssemos estudar, à minha família, pela ajuda que recebi em meus primeiros anos de graduação, e à minha esposa, Natália, cujo apoio, encorajamento e incentivo constantes são a razão da existência desse trabalho.

É claro que nenhuma das pessoas citadas acima é direta ou indiretamente responsável pela abordagem utilizada neste texto. Tive bastante liberdade para escrever e escolher a forma de exposição. A possível fragilidade de certos exemplos ou os erros que eventualmente persistam devem-se exclusivamente a mim.[2]

1 Disponível em:
`https://github.com/eekBR/ufpr-abntex` (acesso em 13/08/2018).

2 Ficaremos imensamente agradecidos a todas as pessoas que nos comunicarem erros no texto, bem como puderem nos enviar críticas ou sugestões. Nossos endereços eletrônicos para este fim são: *marciopalmares@gmail.com* e *heilywagner@ufpr.br*.

Knowledge is our destiny.
(Jacob Bronowski)

RESUMO

Neste trabalho mostraremos que as categorias pequenas podem ser representadas diretamente na categoria **Set**, usando uma versão adaptada do Teorema de Cayley, que chamamos de *Teorema 1*. Veremos também que este procedimento, que funciona apenas para categorias pequenas, pode ser substituído por um procedimento muito mais geral: representar uma categoria qualquer, pequena ou grande, numa categoria apropriada de funtores com imagem em **Set**, por meio do Funtor Yoneda. E por último veremos que é possível demonstrar o Teorema de Cayley usando o Lema de Yoneda e seus corolários, estabelecendo assim um dos sentidos em que a imersão realizada pelo Funtor Yoneda pode ser vista como generalização do Teorema de Cayley.

Palavras-chaves: Teoria de Categorias. Lema de Yoneda. Teorema de Cayley.

ABSTRACT

In this work we show that small categories can be represented directly in the category **Set**, using an adapted version of Cayley's Theorem, named here as *Theorem 1*. We will also see that this procedure, which works only for small categories, can be substituted by a much more general procedure: to represent a category, small or large, in an appropriate category of functors with image in **Set**, through Yoneda Functor. And finally we will see that it is possible to demonstrate Cayley's Theorem using Yoneda Lemma and its corollaries, establishing thus one of the senses that the Yoneda Embedding can be seen as a generalization of Cayley's Theorem.

Key-words: Category Theory. Yoneda Lemma. Cayley's Theorem.

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma introdução modesta à Teoria de Categorias. Esperamos que esse texto possa servir como um guia auxiliar aos estudantes que estão dando seus primeiros passos neste novo território. Dizemos "guia auxiliar" porque existem livros excepcionais sobre o tema (falaremos sobre dois deles logo a seguir) e não pretendemos —nem teríamos condições de— substituir ou concorrer com qualquer um deles. E "introdução modesta" porque desenvolveremos apenas os conceitos estritamente necessários para enunciar e demonstrar o Lema de Yoneda e alguns de seus corolários[1]. Portanto, os estudantes que desejarem percorrer parte de sua caminhada conosco deverão estar cientes de que os levaremos a um ponto elevado onde há uma vista privilegiada da paisagem, mas seguindo um atalho em que é impossível ver muitas outras coisas interessantes que existem pelo caminho. Em resumo, para um conhecimento efetivo sobre o território, precisarão refazer a jornada sozinhos depois, estudando as obras clássicas disponíveis.

O ponto de vista em que nos situamos é o seguinte: Teoria de Categorias é, para nós, metamatemática, "a matemática da matemática" (Robert Geroch). Não é apenas uma linguagem, embora possa ser usada apenas como uma linguagem. É mais do que isso: é uma forma de interpretar ou reinterpretar conhecimentos adquiridos em distintos campos da matemática e também uma forma de direcionar a pesquisa para obter conhecimentos novos, informação nova, que dificilmente seria obtida por meios tradicionais.

Neste texto, além do Lema de Yoneda, apresentaremos conceitos fundamentais da Teoria de Categorias sob a forma de exemplos e por meio da resolução de alguns exercícios de nossas referências principais, que são duas:

(1) *Matemáticas Conceptuales: Una primera introducción a categorías*[2], escrito por William Lawvere e Stephen Schanuel, que chamaremos de *Matemática Conceitual*; e

(2) *Category Theory for Computing Science*[3], de Michael Barr e Charles Wells, que chamaremos de *CTCS*.

Ambos são livros excepcionais, distribuídos livremente pelos próprios autores. Como nosso texto é meramente um guia auxiliar, precisamos dizer algumas palavrinhas sobre as duas obras acima.

---

[1] Uma única exceção a essa regra são os conceitos de *objeto terminal* e *objeto inicial*. Deixar de mencioná-los em certas ocasiões seria uma omissão quase prejudicial...

[2] Disponível em:
`https://www.acsu.buffalo.edu/~wlawvere/` (acesso em 26/06/2017).

[3] Disponível em:
`http://www.math.mcgill.ca/barr/papers/ctcs.pdf` (acesso em 11/07/2017).

1.1 SOBRE OS LIVROS QUE VOCÊ PRECISARÁ ESTUDAR

Durante muitos anos a Teoria de Categorias foi um assunto acessível apenas a matemáticos com elevada formação. Os primeiros livros didáticos (com certa projeção) sobre o assunto —por exemplo, *Theory of Categories*, de Barry Mitchell (1965), e *Categories for the Working Mathematician*, de Saunders Mac Lane (1971)— eram destinados a matemáticos profissionais, não a iniciantes.

Na década de 1990, entretanto, começam a aparecer livros didáticos destinados a um público amplo, em parte devido ao notável êxito das aplicações da Teoria de Categorias às ciências da computação, lógica, filosofia e outras áreas. Nossas "referências principais" foram escritas nesse contexto.

A *Matemática Conceitual* de William Lawvere e Stephen Schanuel é um livro especial, sob vários pontos de vista. Em primeiro lugar, porque foi escrito não apenas como uma introdução à Teoria de Categorias, mas também com o propósito de capacitar o leitor a *pensar categoricamente*, o que significa que se trata também de um livro de "filosofia da matemática". De fato, há uma seção no livro que aborda conceitos como "realidade", "pensamento", "ciência", "conhecimento" — conceitos e preocupações que dizem respeito à epistemologia geral (teoria do conhecimento).

Em segundo lugar, o livro é também o resultado de um curioso experimento: ensinar Teoria de Categorias para uma turma formada com estudantes universitários de segundo ano de diversos cursos, que não tinham a menor ideia do que iriam aprender (uma espécie de disciplina optativa sobre matemática foi ofertada pelos autores na universidade em que ambos lecionavam). O livro, que é um registro minucioso desse experimento, estrutura-se em dois níveis: o primeiro, de caráter técnico-expositivo, é formado pelos "artigos" (o texto fornecido aos estudantes com a apresentação da teoria). O segundo nível, de caráter heurístico, intuitivo, é formado pelas "sessões": a transcrição das aulas onde o conteúdo dos artigos é abordado de outra maneira, com outro enfoque. O registro das aulas mostra os exemplos discutidos e os diálogos estabelecidos com os estudantes. Essa apresentação do mesmo conteúdo em dois níveis de abstração distintos fornece ao leitor uma experiência de aprendizado única.

O CTCS, por sua vez, é um livro "normal" (sem características experimentais, digamos), destinado, em princípio, a estudantes da área de ciências da computação. Apesar disso, pode ser lido com proveito por matemáticos, mesmo aqueles que não têm qualquer interesse direto em ciências da computação (basta pular os exemplos e seções específicas). Este livro possui vários pontos fortes, entre eles: (i) apresenta imediatamente o estreito vínculo existente entre grafos e categorias; (ii) no final do livro há uma seção com respostas para TODOS os exercícios propostos!

Pronto! Agora que você já tem dois livros-texto para seguir, além deste guia auxiliar em mãos, podemos começar o trabalho!

2 PRIMEIROS PASSOS

Há muitas maneiras de tentar explicar o que é a Teoria de Categorias. Vejamos uma interessante metáfora apresentada em *Matemática Conceitual*:

> Todos começamos a colecionar ideias matemáticas desde os primeiros anos da infância, quando, por exemplo, descobrimos que nossas mãos são o reflexo uma da outra, ou, em seguida, quando aprendemos que outras crianças também têm avós —de maneira que esta é uma relação abstrata que uma criança pode ter com uma pessoa mais velha—; e também quando nos damos conta de que as relações "tio" e "primo" são também deste tipo; quando estamos cansados de perder no jogo da velha e analisamos todas as suas possibilidades, para nunca mais perder; quando tentamos entender por que as coisas parecem maiores à medida em que se aproximam ou quando pensamos se o ato de contar termina em algum momento ou estende-se para sempre.
>
> Conforme o leitor progride, este livro pode adicionar alguns tesouros à coleção, mas este não é o seu objetivo. Em vez disso, esperamos mostrar como colocar o grande galpão em ordem, para que possamos encontrar a ferramenta adequada quando for necessário, de modo que as ideias e novos métodos que são adquiridos e desenvolvidos ao longo da vida também possam encontrar seus devidos lugares.
>
> Há nestas páginas conceitos gerais que transcendem as fronteiras artificiais que dividem a aritmética, lógica, álgebra, geometria, cálculo, e assim por diante. Haverá pouca discussão sobre como realizar cálculos especializados, mas muita discussão sobre a análise utilizada para decidir quais passos é preciso executar e em que ordem. Qualquer um que tenha enfrentado um problema genuíno, sem que lhe tenha sido ensinado um método explícito de solução, sabe que esta é a parte mais difícil. (LAWVERE; SCHANUEL, 2009, p. 15, tradução nossa.)

Outra maneira simples de ilustrar a questão (exposta também em *Matemática Conceitual*) é considerar cada ramo ou área da matemática como um "universo". Existem muitos "universos": o universo da topologia, o universo da álgebra linear, o universo da teoria de grupos, o universo da teoria de grafos, etc. Cada um desses universos é uma categoria. A *Teoria de Categorias* é, então, o estudo das relações existentes entre esses universos. Uma preocupação típica dessa teoria é traduzir problemas de um universo na linguagem de outro, onde, presumivelmente, a resolução de tais problemas é mais fácil. Todo estudante de matemática está familiarizado com esse gênero de preocupação: aprendemos desde cedo a traduzir problemas do universo da geometria em problemas no universo da álgebra, por meio da Geometria Analítica.

Antes de apresentarmos uma definição de categoria, recordemos um conceito bem conhecido de todos, o conceito de *estrutura algébrica*. Uma estrutura algébrica é um conjunto (ou mais de um) onde definimos uma operação (ou mais de uma) que deve obedecer a certas regras ou leis. *Espaços vetoriais* e *grupos* são exemplos típicos de estruturas algébricas. No caso dos espaços vetoriais, temos dois conjuntos envolvidos: o conjunto de vetores e o conjunto de escalares. Duas operações são então definidas: a adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar. A definição usual de espaço vetorial contém uma lista relativamente grande de condições que tais conjuntos e operações devem satisfazer, chamadas de *axiomas de espaço vetorial*. Grupos são estruturas muito mais simples: existe apenas um conjunto e apenas uma operação definida no conjunto, que deve satisfazer apenas três condições!

A definição de categoria dada a seguir reproduz esse mesmo padrão, com uma vantagem em termos de sua compreensão pelo iniciante: parece apenas descrever fatos familiares que ocorrem no universo dos conjuntos e funções, um território bem conhecido!

2.1 DEFINIÇÃO DE CATEGORIA

Definição 2.1. ***Uma CATEGORIA é formada pelos seguintes ingredientes:***

(1) Uma coleção de OBJETOS: $A, B, C...$

(2) Uma coleção de MORFISMOS: $f, g, h...$

(3) Um único objeto DOMÍNIO para cada morfismo f*, denotado por* $dom(f)$.

(4) Um único objeto CODOMÍNIO para cada morfismo f*, denotado por* $cod(f)$.

Escrevemos $A \xrightarrow{f} B$ *ou* $f\colon A \to B$ *para indicar que* $A = dom(f)$ *e* $B = cod(f)$.

(5) Para todo objeto A*, um (único) MORFISMO-IDENTIDADE, com domínio* A *e codomínio* A*, denotado por* 1_A:

$$1_A\colon A \longrightarrow A$$

(6) Para todo par de morfismos $f\colon A \to B$ *e* $g\colon B \to C$*, isto é, tais que* $cod(f) = dom(g)$*, um terceiro morfismo*

$$g \circ f\colon A \longrightarrow C$$

denominado COMPOSIÇÃO de f *e* g.

A composição de morfismos deve respeitar as seguintes REGRAS DE CÁLCULO:

(i) *LEI ASSOCIATIVA: Dados* $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to D$, *verifica-se a igualdade:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(ii) *LEIS DE IDENTIDADE: Para todo morfismo* $f\colon A \to B$, *verifica-se:*

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

Observações:

(1) A definição nos diz que uma categoria é formada por uma coleção de objetos, uma coleção de morfismos, uma noção de composição de morfismos e certas regras de cálculo para a composição.

Usamos a palavra "coleção" intencionalmente. Aqui, "coleção" *não é* necessariamente o mesmo que conjunto. Acontece que existem categorias formadas por coleções que *não são* conjuntos: são entidades de certo modo "maiores" do que os conjuntos, chamadas de "classes". Por isso, usamos a palavra *coleção* como uma variável, que pode significar classe ou conjunto. Não se preocupe muito com isso agora. Mais tarde vamos delimitar as categorias com as quais iremos trabalhar, de modo a evitar problemas, como o *Paradoxo de Russell*, que surge quando pensamos em um conjunto formado por todos os conjuntos, ou na categoria de todas as categorias (por enquanto, evite pensar nisso).

(2) O que são os objetos de uma categoria e o que são os seus morfismos? Depende do universo em que estamos, isto é, depende da categoria. Por exemplo, na categoria dos espaços vetoriais (no universo da álgebra linear), os *objetos* são espaços vetoriais definidos num determinado corpo e os *morfismos* são transformações lineares entre tais espaços.

(3) A notação usada na definição para morfismos e objetos, que imita a representação usual de funções entre conjuntos, não é muito adequada, pois de certa forma mantém nossa mente presa a esse universo, o universo dos conjuntos e funções.

Contudo, o exemplo mais fundamental e talvez mais importante de categoria é aquele em que a coleção de objetos é formada por todos os conjuntos e a coleção de morfismos é formada por todas as funções (arbitrárias) entre tais conjuntos. Essa categoria é representada com **Set**. Por ser a mais importante e a mais fundamental, ela acaba imprimindo sua marca sobre as demais categorias, que são obrigadas a reproduzir sua simbologia. No entanto, como veremos, existem categorias em que os objetos não são conjuntos (nem classes) e os morfismos não são funções (nem nada parecido).

(4) A definição nos diz também que um mesmo morfismo não pode possuir mais de um domínio ou mais de um codomínio. Em Teoria de Categorias, há um mandamento para os morfismos: *Não possuirás mais de um domínio ou mais de um codomínio!*

No caso da categoria de conjuntos e funções, por exemplo, pensemos na *regra* ou *processo* g que extrai a raiz quadrada de um número t não-negativo: $g(t) = \sqrt{t}$. Se quisermos que esse processo torne-se uma função, precisamos atribuir a ele um domínio e um contradomínio. Se escolhermos os naturais $\mathbb{N}$ como domínio e os reais $\mathbb{R}$ como contradomínio, teremos uma função $\mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$. Se modificarmos o domínio, por exemplo, substituindo $\mathbb{N}$ por $\mathbb{Q}_+$, teremos uma nova função, $\mathbb{Q}_+ \xrightarrow{h} \mathbb{R}$, que, embora continue extraindo a raiz quadrada, é diferente da anterior.

Voltando agora às categorias genéricas: se em dada categoria um mesmo morfismo f é escrito como $f\colon A \to B$ e $f\colon C \to D$, então, necessariamente, $A = C$ e $B = D$.

(5) Como vimos, a composição de morfismos, em qualquer categoria, do mesmo modo que a composição de funções, deve ser associativa. A *associatividade da composição* de morfismos é, então, a primeira regra que a composição deve respeitar.

Um diagrama típico para representar a associatividade da composição de morfismos $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to D$ é o seguinte:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\ & C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

Diagramas como este são chamados de *comutativos*, porque os três caminhos usados para sair de A e chegar em D, por exemplo, são considerados iguais (representam o mesmo morfismo). O mesmo vale para os pares (A, C) e (B, D), isto é, para pares de objetos em que há pelo menos dois caminhos no diagrama entre o primeiro elemento do par e o segundo elemento do par. Há dois caminhos saindo de B e chegando em D, mas eles representam o mesmo morfismo (se o diagrama for considerado comutativo). Diagramas comutativos são, portanto, a forma categórica de representar equações; neste caso, a equação:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(6) A segunda regra para a composição (*existência de elementos neutros*) deriva dos seguintes fatos: na categoria de conjuntos e funções, todo conjunto possui uma *função identidade* a ele associada. Por exemplo, um conjunto qualquer A possui uma função identidade $id_A : A \to A$ definida por:

$$\text{para todo } a \in A, \quad id_A(a) = a$$

Essa função identidade tem uma propriedade interessante: funciona como um *elemento neutro* para a composição de funções! Assim como o número 1 é o elemento neutro da multiplicação, as funções identidade funcionam como elemento neutro da composição de funções. O fato de que a composição de funções comporte-se de modo muito parecido com a multiplicação de números (exceto por não ser comutativa) é retratado pela escolha do símbolo da composição, "$\circ$", que deveria nos fazer recordar o ponto usado para representar a multiplicação. E para explorar ainda mais essa analogia, costumamos representar a função identidade de um conjunto A com o símbolo 1_A (trocamos id por 1). Assim, $1_A : A \to A$ é tal que

$$\text{para todo } a \in A,\ 1_A(a) = a$$

A razão para o emprego do 1 fica mais clara diante da composição: consideremos a composição das funções $1_A\colon A \to A$ e $g\colon A \to B$. Um diagrama típico para essa situação seria o seguinte:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "1_A"] \arrow[rr, "g \circ 1_A"'] & & B \end{tikzcd}$$

Parece mais ou menos óbvio, pelo diagrama acima e pela notação "$\circ$", que $g \circ 1_A$ deve ser igual a g. De fato isso acontece, mas a comprovação depende da definição de composição de funções, ou melhor, depende da definição de composição de morfismos na categoria específica em que estamos. Por definição (de composição de funções), para todo $a \in A$,

$$(g \circ 1_A)(a) = g(1_A(a)) = g(a)$$

Logo, como $g \circ 1_A$ e g possuem o mesmo domínio e o mesmo contradomínio e, além disso, têm o mesmo valor para todo $a \in A$, resulta $g \circ 1_A = g$.

A mesma coisa acontece quando fazemos a composição com uma identidade definida no contradomínio de uma função dada. Se tivéssemos $f\colon A \to B$ e $1_B\colon B \to B$, a composição seria $1_B \circ f$, que é a própria função f. Isso mostra em que sentido a função identidade de um conjunto qualquer X, 1_X, funciona como um elemento neutro para a composição de funções.

(7) A definição que apresentamos acima é a mais simples e útil na prática. Entretanto, existe uma forma muito interessante de definir categorias usando grafos. Veremos essa definição no momento oportuno.

2.2 EXEMPLOS DE CATEGORIAS

Apresentamos a seguir alguns exemplos de categorias, com o objetivo de ilustrar a definição e dar nome a alguns conceitos que serão úteis posteriormente.

Considere os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, o *conjunto das partes de* A (formado por todas as "partes" ou todos os subconjuntos de A), e a relação de inclusão $\subseteq$.

Você certamente sabe que a relação de inclusão $\subseteq$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.[1] Logo, estabelece uma *relação de ordem* no interior do conjunto $\mathscr{P}(A)$, chamada de uma *ordem parcial*, pois nem todos os elementos de $\mathscr{P}(A)$ estão relacionados pela inclusão (não há relação entre $\{1\}$ e $\{2\}$). Dizer que os elementos de $\mathscr{P}(A)$ podem ser *ordenados pela inclusão* significa, obviamente, que a inclusão nos permite listar esses elementos em determinada ordem: $\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1, 2\}$ ou ainda $\emptyset \subseteq \{2\} \subseteq \{1, 2\}$.

O conjunto $\mathscr{P}(A)$ equipado com a relação de inclusão $\subseteq$ forma uma estrutura, chamada de *conjunto parcialmente ordenado*. Representamos essa estrutura com o símbolo $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$. O que tudo isso tem a ver com categorias? Bem, acontece que todo conjunto parcialmente ordenado determina uma categoria. Para o nosso exemplo, poderíamos escrever $C(\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle)$ — lê-se: *categoria determinada pela estrutura que está entre parênteses* —, mas esta é, visivelmente, uma notação muito ruim (excessivamente carregada). Notações à parte, como a categoria $C(\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle)$ é construída?

A definição de categoria nos diz que uma categoria é formada por alguns ingredientes e algumas regras de cálculo. Os ingredientes básicos de qualquer categoria são *objetos*, *morfismos* e *composição de morfismos*. Vejamos tais ingredientes um por um:

(1) Os objetos de $C(\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle)$ serão os elementos do conjunto $\mathscr{P}(A)$, isto é, os subconjuntos de A:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$$

(2) Os morfismos serão obtidos da relação de inclusão. Cada inclusão entre elementos de $\mathscr{P}(A)$ determinará, por definição, *um único* morfismo na categoria determinada por $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$. Assim, por exemplo, entre $\{1\}$ e $\{1, 2\}$ haverá um único morfismo, correspondendo à inclusão $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$. O morfismo será representado por uma flecha:

$$\{1\} \longrightarrow \{1, 2\}$$

Se necessário, podemos dar nomes para as flechas, isto é, para os morfismos. A flecha acima, por exemplo, poderia ser chamada de f (de "flecha"): $\{1\} \xrightarrow{f} \{1, 2\}$.

[1] *Reflexiva*: para todo conjunto A, vale: $A \subseteq A$. *Antissimétrica*: para quaisquer A e B, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. *Transitiva*: para quaisquer A, B e C, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

(3) A composição de morfismos será o "equivalente categorial", digamos assim, da transitividade da relação de inclusão:

por exemplo, as inclusões

$$\emptyset \subseteq \{2\} \subseteq \{1,2\}$$

determinam os morfismos

$$\emptyset \longrightarrow \{2\} \longrightarrow \{1,2\}$$

Como $\emptyset \subseteq \{2\} \subseteq \{1,2\}$ implica $\emptyset \subseteq \{1,2\}$, a mesma coisa acontece com os morfismos:

$$\emptyset \longrightarrow \{2\} \longrightarrow \{1,2\} \;\; \text{implica} \;\; \emptyset \longrightarrow \{1,2\}$$

Quando organizamos todos os objetos e morfismos da categoria determinada por $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$ em um único diagrama, aparecem coisas interessantes:

$$\begin{tikzcd}
& \{1,2\} & \\
\{1\} \arrow[ur] & & \{2\} \arrow[ul] \\
& \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

No diagrama acima estamos omitindo a representação dos morfismos que resultam da reflexividade da relação de inclusão: por exemplo, $\{1\} \subseteq \{1\}$ determina o morfismo $\{1\} \longrightarrow \{1\}$. Como só pode haver um único morfismo para cada inclusão, o morfismo $\{1\} \longrightarrow \{1\}$ obrigatoriamente deve corresponder ao morfismo-identidade do objeto $\{1\}$ (morfismos-identidade são, portanto, a tradução categorial da reflexividade da inclusão). Embora os morfismos-identidade não estejam desenhados no diagrama, eles existem (estão subentendidos).

O diagrama acima é comutativo, o que significa que os três caminhos distintos ligando o vazio $\emptyset$ ao conjunto $A = \{1,2\}$ representam o mesmo morfismo (claro, pois representam a inclusão $\emptyset \subseteq \{1,2\}$ e, pela definição, só há um morfismo para cada inclusão).

Observe ainda que o objeto $\emptyset$ está relacionado com todos os demais objetos da categoria[2]. Em categorias, dizer que dois objetos estão relacionados significa dizer que há ao menos um morfismo entre eles. Além disso, a relação que o vazio $\emptyset$ estabelece com todos os

2 Consequência do fato de que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

demais objetos da categoria é bem específica: ele dispara *uma única* flecha contra cada um dos objetos da categoria. Poderíamos dizer, portanto, que *para todo* objeto X da categoria $C(\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle)$ *existe um único* morfismo $\emptyset \longrightarrow X$. Note ainda que, em certo sentido, o diagrama *começa* no vazio, ou *inicia* no vazio. Por tais razões, o conjunto vazio $\emptyset$ é chamado de *objeto inicial* da categoria determinada por $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$. Algumas categorias possuem objeto inicial, outras não.

O objeto $\{1,2\}$, por sua vez, também está relacionado com todos os demais objetos da categoria e esta relação também é do tipo "*para todo... existe um único...*": o objeto $\{1,2\}$ recebe uma única flecha de cada um dos objetos da categoria. Por outro lado, o diagrama parece *acabar* ou *terminar* no objeto $\{1,2\}$. Por essas razões, ele é chamado de *objeto terminal* de $C(\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle)$. Algumas categorias possuem objeto terminal, outras não.

Consideremos agora o conjunto $\mathbb{Z}^*$ de todos os números inteiros (sem o zero) e a relação de divisibilidade $|$. Este exemplo é parecido com o anterior. Dizemos que "dois divide seis", e escrevemos $2 \,|\, 6$, porque existe um número inteiro d para o qual $2d = 6$. Dizemos, ainda, na expressão anterior, que 2 e d são *divisores* de 6 e que 6 é um *múltiplo* de 2 e de $3 = d$.

Todo número inteiro não-nulo é um divisor de si mesmo: $a \,|\, a$ (reflexiva). Se $a \,|\, b$ e $b \,|\, c$, então $a \,|\, c$ (transitiva). Observe agora, porém, que $-2 \,|\, 2$ e $2 \,|\, -2$, mas $2 \neq -2$, isto é, não vale a propriedade antissimétrica (se $a \,|\, b$ e $b \,|\, a$, não podemos concluir que são o mesmo número, só podemos dizer que $|\, a \,| = |\, b \,|$).

Em resumo, a relação de divisibilidade *parece* uma relação de ordem... Mas como a propriedade antissimétrica falha, ela é chamada apenas de uma *pré-ordem*. Assim, o conjunto $\mathbb{Z}^*$ equipado com a relação $|$ de divisibilidade forma uma estrutura, chamada de *conjunto pré-ordenado*. Representamos essa estrutura com o símbolo $\langle \mathbb{Z}^*, | \rangle$. Observe que uma ordem parcial é um tipo particular de pré-ordem (satisfaz uma condição adicional), ou seja, toda ordem parcial é uma pré-ordem. Como anteriormente, todo conjunto pré-ordenado determina uma categoria. Para cada par (divisor, múltiplo) do tipo $a \,|\, b$ teremos, por definição, *um único* morfismo $a \to b$. Note que, agora, cada número inteiro é um objeto. Temos, assim, a propósito, um exemplo simples de categoria em que os objetos não são conjuntos (são números) e em que os morfismos não são funções (são apenas flechas).

A seguir, apresentamos nossa primeira lista de exercícios! Neste texto, partes significativas da teoria são apresentadas sob a forma de exercícios. Ou seja, não é possível ler o trabalho (com um bom aproveitamento) sem resolver os exercícios. Sempre que começarmos uma nova seção ou um novo capítulo, admitiremos que você fez a sua parte!

2.2.1 Exercícios

1. Em relação à categoria determinada por $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$, responda as seguintes perguntas:

(a) Como poderíamos nos certificar de que cada morfismo nessa categoria possui um único objeto domínio e um único objeto codomínio?

(b) O que deveríamos fazer para nos certificar de que a composição de morfismos é associativa? Como verificar as leis de identidade para a composição?

2. Poderíamos ter considerado a relação $\supseteq$ ("contém") em $\mathscr{P}(A)$ em vez de considerar a relação de inclusão $\subseteq$ ("está contido"). Em tal caso, teríamos a estrutura $\langle \mathscr{P}(A), \supseteq \rangle$, que também determina uma categoria. Faça um diagrama mostrando todos os objetos e morfismos (exceto morfismos-identidade) da categoria determinada por $\langle \mathscr{P}(A), \supseteq \rangle$. Em seguida, responda:

(a) Qual é o objeto terminal dessa nova categoria? Qual é o objeto inicial dessa nova categoria?

(b) Comparando as duas categorias, a determinada pela relação $\subseteq$ e a determinada pela relação $\supseteq$, o que podemos dizer a respeito de suas semelhanças e diferenças? Os objetos são os mesmos? Os morfismos são os mesmos?[3]

3. Consideremos a categoria determinada por $\langle \mathbb{Z}^*, \mid \rangle$. Responda:

(a) Todo objeto possui um morfismo-identidade? A existência de morfismos-identidade corresponde a qual propriedade da relação de divisibilidade?

(b) Como podemos nos certificar de que cada morfismo $f\colon a \to b$ possui um único objeto como domínio e um único objeto como codomínio?

(c) Como podemos nos certificar de que para dois morfismos $f\colon a \to b$ e $g\colon b \to c$ realmente existe a composição $g \circ f\colon a \to c$?

(d) Como poderíamos verificar a associatividade da composição e as leis de identidade?

(e) Essa categoria possui objeto inicial? Possui objeto terminal?

(f) A relação de divisibilidade pode ser definida, como é usual, em $\mathbb{Z}$, bastando, para isso, impedir o zero de figurar na posição de divisor. Definimos: se $a \neq 0$ e b são inteiros quaisquer, dizemos que a divide b quando existe um inteiro d tal que $ad = b$. Então, o zero, por definição, fica excluído da posição de divisor, mas pode aparecer como múltiplo: $2 \mid 0$, pois existe um inteiro d tal que $2d = 0$, a saber, $d = 0$. Com essa definição de divisibilidade (que é a usual), obtemos o conjunto pré-ordenado $\langle \mathbb{Z}, \mid \rangle$. É tentador pensar em uma possível categoria determinada por $\langle \mathbb{Z}, \mid \rangle$, porque o zero seria um objeto terminal. Entretanto, um dos ingredientes da definição de categoria não seria contemplado. Em outras palavras, incluindo o zero na brincadeira, não obtemos uma categoria. Descubra onde está o problema.

[3] Obs.: a categoria determinada por $\langle \mathscr{P}(A), \supseteq \rangle$ é chamada de *categoria oposta* ou *categoria dual* da categoria determinada por $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$.

3 CONJUNTOS E FUNÇÕES

Dissemos anteriormente que, em certo sentido, a categoria mais importante e a mais fundamental é a categoria de conjuntos e funções. Isto se deve, em parte, ao fato de que as categorias encontradas normalmente na prática matemática, por exemplo, as categorias de grupos, espaços topológicos, espaços vetoriais, são categorias formadas pelos assim chamados *conjuntos estruturados*, isto é, conjuntos equipados com alguma estrutura. Nessas categorias, os morfismos são *funções que preservam a estrutura* definida no conjunto. Assim, no caso dos grupos, os objetos são os conjuntos estruturados $\langle G, *, e \rangle$, $\langle H, \cdot, u \rangle$, etc., e os morfismos entre tais objetos são os *homomorfismos de grupos*. No caso dos espaços vetoriais, os objetos são espaços vetoriais U, V, W, definidos num corpo $\mathbb{K}$ de escalares, e os morfismos são funções entre tais espaços que preservam a estrutura de espaço vetorial, denominadas, como sabemos, *transformações lineares*. Categorias formadas dessa maneira, com conjuntos estruturados e com funções que preservam estrutura, são às vezes chamadas de *categorias concretas*.

Quando nos referimos à categoria de conjuntos e funções, entretanto, não estamos pensando em conjuntos particulares. Trata-se aqui de *conjuntos abstratos*, que não possuem qualquer estrutura. Como não há estrutura alguma para preservar, as funções entre tais conjuntos são inteiramente arbitrárias.

Podemos pensar num conjunto abstrato como uma coleção de pontos. A única coisa que nos permite distinguir tais conjuntos é o seu "tamanho": um conjunto A pode possuir mais elementos que um conjunto B, pois, mesmo sem levar em conta a natureza dos elementos, podemos saber quantos elementos existem em cada um deles (presumivelmente) e compará-los por seus tamanhos.

Surge aqui a primeira conclusão, de certo modo paradoxal:

> (...) estas estruturas [categorias concretas] são todas construídas a partir dos conjuntos, que podem ser considerados como carentes de qualquer estrutura. Algumas pessoas interpretam isso dizendo que os conjuntos são o fundamento da matemática. O que realmente se revela é que, embora um conjunto abstrato possa ser completamente descrito por um único número [sua cardinalidade], os conjuntos têm o potencial de suportar todos os tipos de estruturas, com a ajuda dos morfismos. (LAWVERE; SCHANUEL, 2009, p. 153, tradução nossa.)

Em outras palavras, usando morfismos para introduzir estrutura em conjuntos, podemos descrever praticamente toda a matemática. Este é o primeiro sentido em que a categoria de conjuntos e funções é a mais importante ou a mais fundamental.

Há, porém, outro. Existem muitas categorias em que os objetos *não são* conjuntos e em que os morfismos *não são* funções. Entretanto, surpreendentemente, pode-se demonstrar —faremos isso no Teorema 1— que tais categorias reduzem-se, de certo modo, a categorias em que os objetos são conjuntos e em que os morfismos são funções, ou comportam-se como categorias de conjuntos e funções, exatamente no mesmo sentido em que um grupo qualquer comporta-se como um grupo de permutações.

Essa conclusão, porém, é válida apenas para categorias chamadas de "pequenas". Uma categoria é dita *pequena* quando sua coleção de morfismos é um conjunto legítimo, isto é, não é uma classe ou qualquer outra coisa. Ora, se a coleção de morfismos da categoria é um conjunto, consequentemente, como há um único par de objetos para cada morfismo (o domínio e o codomínio do morfismo), a coleção de objetos é também um conjunto. Pelo contrário, categorias em que a coleção de morfismos ou a coleção de objetos formam uma classe (e não um conjunto legítimo) são chamadas de categorias *grandes*. As categorias que empregamos em nossa prática matemática diária são, em geral, grandes. Por exemplo, a própria categoria dos conjuntos: sua coleção de objetos deve conter todos os conjuntos concebíveis; logo, é a classe de todos os conjuntos.

Em resumo: categorias grandes normalmente encontradas na prática matemática (para as quais o Teorema 1 não se aplica) são, em geral, categorias concretas: formadas por conjuntos estruturados. Por outro lado, qualquer categoria pequena que possamos conceber — e nisto podemos incluir uma infinidade de exemplos "patológicos"— reduz-se, como veremos, a uma categoria de conjuntos e funções!

Temos assim uma explicação para o fato, inicialmente incompreensível, de que a própria definição de categoria parece apenas descrever fatos familiares do universo dos conjuntos e funções. Tendo "o potencial de suportar todos os tipos de estrutura", e assim descrever praticamente toda a matemática, é como se a categoria de conjuntos e funções dissesse:

— *Todos os demais universos da matemática serão construídos à minha imagem e semelhança. Eis aqui o padrão de construção: a definição de categoria, que é meu próprio retrato.*

4 ISOMORFISMO

Certas noções familiares, ou supostamente familiares, são às vezes difíceis de definir. Temos uma ideia em mente sobre o conceito em questão, mas é difícil expressá-la de modo satisfatório. A noção de função, por exemplo, é um caso típico. É difícil definir função, apesar de termos uma ideia bastante precisa sobre o que as funções são.

Em outros casos, temos definições simples, que memorizamos facilmente e aprendemos a recitar, mas que não revelam todo o conteúdo da ideia, noção ou conceito definido. Este é o caso do conceito de isomorfismo. É fácil definir isomorfismo, mas a definição contém pouquíssima informação, não nos diz praticamente nada.

Vejamos uma definição típica:

Definição 4.1. *Numa categoria qualquer $\mathscr{C}$, um morfismo f entre objetos X e Y, $X \xrightarrow{\quad f \quad} Y$, é chamado de um* ***isomorfismo*** *quando existe um segundo morfismo g entre tais objetos, porém no sentido contrário, $Y \xrightarrow{\quad g \quad} X$, satisfazendo as seguintes condições: (i) $f \circ g = 1_Y$ e (ii) $g \circ f = 1_X$.*

Em tal caso, dizemos ainda que X e Y são objetos isomorfos, fato que representamos com a notação $X \cong Y$.

Em resumo, um isomorfismo é um morfismo invertível em uma categoria. Na categoria de conjuntos e funções, um morfismo invertível é uma função invertível, uma bijeção. Se $f\colon A \to B$ é uma função invertível, dizemos que a função f é um *isomorfismo na categoria dos conjuntos*, e portanto os conjuntos A e B são isomorfos, o que nos diz apenas que A e B possuem o mesmo número de elementos. Assim, na categoria de conjuntos e funções, saber que dois objetos A e B são isomorfos é saber apenas que têm o mesmo tamanho, o mesmo número de elementos. Mas em outras categorias saber que dois objetos são isomorfos pode ser algo muito revelador.

A definição acima, por si mesma, como observamos, contém pouca informação. Para entender de fato o que é isomorfismo, precisamos recorrer aos conhecimentos que acumulamos ao longo de nossa trajetória.

Os casos mais instrutivos de isomorfismo são justamente aqueles que usamos no dia a dia, e de modo tão frequente que acabamos perdendo de vista o quanto são surpreendentes. Por exemplo, transformações lineares comportam-se exatamente como matrizes. São coisas completamente diferentes, convenhamos. Transformações lineares são funções entre espaços vetoriais que preservam a estrutura de espaço vetorial. Matrizes são matrizes. Podemos multiplicar matrizes, em certos casos. E acontece que o comportamento das matrizes do ponto de vista da multiplicação reflete exatamente o comportamento das transformações lineares do ponto de vista da composição, de tal maneira que podemos considerá-las como sendo, virtualmente, a mesma coisa! Isso nos diz que deve haver algum isomorfismo nessa história... (Consulte seu livro de álgebra linear favorito e verifique qual é o isomorfismo envolvido. Em seguida, pense em termos de categorias. Este isomorfismo é um morfismo invertível em qual categoria?)

5 INTERPRETAÇÃO. FUNTORES

Quando estudamos Teoria de Grupos pela primeira vez, normalmente somos apresentados primeiro ao conceito de *simetria* de figuras geométricas (as simetrias de um triângulo equilátero, por exemplo) e depois aprendemos a ver tais simetrias como transformações definidas sobre a figura em questão (neste caso, rotações e reflexões). Posteriormente, somos apresentados à ideia de *encadear*, *concatenar*, *compor* ou *multiplicar* simetrias, de onde surge o conceito de um *grupo de simetrias* ou *grupo de transformações*. Mais à frente, constatamos que as simetrias são transformações que ficam completamente caracterizadas por sua ação sobre os vértices da figura, o que pode ser formalmente descrito como permutações no conjunto de vértices. Aparecem, assim, os *grupos de permutações*, como o equivalente analítico, digamos, da motivação geométrica inicial.

Pouco depois o estudante é finalmente apresentado à definição de um *grupo abstrato* e, em particular, familiariza-se com a representação de grupos abstratos pequenos por meio das *tabelas de multiplicação*, em que toda a informação sobre a estrutura de grupo é resumida.

Suponhamos que $\langle G, *, e\rangle$ é um grupo de três elementos definido pela seguinte tabela de multiplicação:

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

(Aqui, a palavra *multiplicação* não significa multiplicação usual de números, é apenas uma abreviatura para "a operação do grupo".)

A tabela nos diz como "multiplicar" os elementos, nos mostra quem é o elemento neutro da operação $*$, nos diz que a e b são inversos um do outro e, ainda, que o grupo é comutativo ($x * y = y * x,$ para quaisquer $x, y \in G$).

Entretanto, os elementos do conjunto $G = \{e, a, b\}$, tal como figuram acima, não possuem qualquer significado, não têm conteúdo.

Se quisermos descrever algum fenômeno do mundo real ou do mundo abstrato da matemática usando tal estrutura, precisamos preencher as letras e, a e b com algum conteúdo, isto é, precisamos dar a elas algum *significado*, precisamos *interpretá-las* — a mesma coisa vale para a operação abstrata $*$.

Uma interpretação óbvia para o grupo acima, que o transforma num grupo concreto, num grupo com conteúdo, é a interpretação de $\langle G, *, e\rangle$ como $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0\rangle$, isto é, como o grupo formado pelos inteiros módulo 3, com a operação de grupo sendo a adição módulo 3.

A tabela da operação de grupo de $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0 \rangle$ é a seguinte:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Normalmente, fazemos tal interpretação de maneira mais ou menos automática (imaginando uma espécie de superposição de tabelas, como se fossem figuras congruentes) e então dizemos que as tabelas são "essencialmente idênticas".

No entanto, nossa intuição não funcionaria se as tabelas fossem muito maiores. Vejamos, então, em que consiste, formalmente, uma interpretação. Para simplificar as coisas, vamos chamar o processo de interpretação de F.

Nossa *interpretação* F é um processo que, neste nível, envolve quatro etapas:

(1) Na **primeira etapa**, simplesmente interpretamos o conjunto subjacente (à estrutura de grupo) G como o conjunto $\mathbb{Z}_3$, isto é, olhamos para G e afirmamos:

— Este conjunto será transformado no conjunto $\mathbb{Z}_3$!

Portanto, nossa interpretação F identifica os objetos G e $\mathbb{Z}_3$, fato que representamos assim:

$$F(G) = \mathbb{Z}_3$$

(2) A **segunda etapa** do processo consiste na interpretação dos *elementos* de G. Nosso esquema intuitivo de "superposição de tabelas" nos diz que a interpretação óbvia para os elementos seria a seguinte:

$$F(e) = 0$$

$$F(a) = 1$$

$$F(b) = 2$$

(3) A **terceira etapa** é a mais interessante: precisamos nos certificar de que os valores de cada célula da tabela de multiplicação de $\langle G, *, e \rangle$ estão corretamente interpretados nas células correspondentes da tabela de adição de $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0 \rangle$.

Uma célula da tabela de $\langle G, *, e \rangle$ é apenas o resultado de uma multiplicação em G. Por exemplo, como $a = b * b$, comparar células correspondentes (neste caso, a última do canto inferior direito) é a mesma coisa que verificar se $F(a) = F(b * b) = F(b) +_3 F(b)$.

Mas $F(a) = 1$, donde $F(a) = F(b * b) = 1 = 2 +_3 2$

isto é,

$$F(b * b) = 1 = 2 +_3 2 = F(b) +_3 F(b)$$

ou seja,

$$F(b * b) = F(b) +_3 F(b)$$

Essa mesma verificação pode ser feita em todas as células correspondentes das duas tabelas, mostrando assim que, para quaisquer $x, y \in G$, temos:

$$F(x * y) = F(x) +_3 F(y) \tag{5.1}$$

A equação acima é extremamente importante e está nos dizendo que nossa interpretação F é consistente, isto é, que um elemento qualquer na tabela de $\langle G, *, e\rangle$ está corretamente interpretado na célula correspondente da tabela de $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0\rangle$. No universo da teoria de grupos, costuma-se dizer que F é uma função de G em H que *respeita* ou *preserva* a *estrutura* de grupo, chamada por isso de um *homomorfismo* de grupos.

(4) A **quarta etapa** do processo de interpretação F consiste em transformar o elemento neutro de $\langle G, *, e\rangle$ no elemento neutro de $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0\rangle$. Definimos de antemão que isso aconteceria, pois escolhemos $F(e) = 0$.

No entanto, constatamos que a equação $F(x * y) = F(x) +_3 F(y)$ verifica-se para quaisquer x, y em G. Por isso, podemos escrever, em particular:

$$F(e) = F(e * e) = F(e) +_3 F(e) = 0 +_3 0 = 0$$

Ou seja, como veremos mais tarde, no universo dos grupos, a quarta etapa transforma-se em um teste simples que, na realidade, é consequência da equação (5.1). Mas é importante sempre efetuá-lo, porque se trata, aqui, de uma *condição necessária*[1]: se uma interpretação não leva elemento neutro em elemento neutro, podemos descartá-la imediatamente, não é necessário percorrer as outras etapas.

Quando toda a discussão acima for reescrita na linguagem da Teoria de Categorias, e os grupos $\langle G, *, 0\rangle$ e $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0\rangle$ forem apenas duas categorias, a interpretação F receberá um nome especial: será chamada de ***funtor***. Assim, funtores são *formas de interpretar uma categoria em outra*[2].

[1] Consideremos M o conjunto de todos os mamíferos e V o conjunto de todos os vertebrados. Sabemos que $M \subset V$. Essa relação entre os dois conjuntos pode ser traduzida, na linguagem do cálculo proposicional, como $M \Rightarrow V$. Sendo verdadeiro o condicional $M \Rightarrow V$, dizemos V é *condição necessária* para M, ou seja, é *necessário* que um animal seja vertebrado para que possa ser caracterizado como mamífero. Por outro lado, dizemos que M é *condição suficiente* para V, isto é, é *suficiente* que um animal seja mamífero para que possa ser caracterizado como vertebrado.

[2] Essa abordagem é devida a William Lawvere e Stephen Schanuel, apenas o exemplo "$\langle G, *, 0\rangle$ *versus* $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0\rangle$" é de nossa autoria. No original, isto é, em *Matemática Conceitual*, os funtores aparecem naturalmente no processo de interpretação da categoria dos endomorfismos de conjuntos como uma subcategoria da categoria dos grafos orientados. Parafraseando os autores: "Agora vocês podem ver o método em nossa loucura..." (LAWVERE; SCHANUEL, 2009, p. 140).

5.1 DEFINIÇÃO DE FUNTOR

Tendo construído o conceito, podemos agora defini-lo.

Definição 5.1. *Um **funtor***

$$F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$$

entre categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ é uma função que associa objetos a objetos e morfismos a morfismos, satisfazendo as três condições seguintes:

(1) $F(f\colon A \to B) = F(f)\colon F(A) \to F(B)$

(2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

(3) $F(1_A) = 1_{F(A)}$

Assim, o funtor F preserva domínios e codomínios, preserva os morfismos-identidade e, o mais importante, preserva a composição de morfismos.

Observações:

1. Você certamente percebeu que introduzimos um esquema de notação sem aviso-prévio: categorias serão sempre representadas por letras caligráficas ($\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$, etc.). Funtores serão sempre representados com as letras típicas usadas para denotar funções, porém nas versões maiúsculas: F, G, H, etc.

2. Repare que na condição 1 da definição o argumento do funtor F é um morfismo $f\colon A \to B$ da categoria $\mathscr{C}$, e o símbolo F usado para representar o funtor *se distribui no interior do argumento*: a expressão $F(f\colon A \to B)$ transforma-se em $F(f)\colon F(A) \to F(B)$, como se a letra F percorresse o argumento termo a termo. Isso é um tanto engraçado à primeira vista, mas é uma notação muito útil, que nos ajuda a visualizar a ação do funtor. Observe ainda que o resultado da ação do funtor F sobre o $\mathscr{C}$-morfismo $f\colon A \to B$ é um $\mathscr{D}$-morfismo $F(f)\colon F(A) \to F(B)$.[3]

   É mais fácil compreender o que está acontecendo aqui se recordarmos as duas primeiras etapas do nosso processo F de interpretação de $\langle G, *, e\rangle$ como $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0\rangle$, discutido na seção anterior.

   A primeira etapa consistia simplesmente em atribuir um conjunto subjacente (à estrutura de grupo) ao outro. Escrevíamos: $F(G) = \mathbb{Z}_3$. Isto corresponde agora a *transformar objeto em objeto*. No caso do $\mathscr{C}$-morfismo $f\colon A \to B$, os objetos que são o domínio e o codomínio de f precisam ser transformados em (ou interpretados como) objetos na categoria $\mathscr{D}$. Representamos a interpretação de A em $\mathscr{D}$, o objeto "A-interpretado",

[3] Nova convenção adotada sem aviso-prévio: para economizar palavras, em vez de dizer "f é um morfismo na categoria $\mathscr{C}$", diremos, às vezes, "f é um $\mathscr{C}$-morfismo".

por $F(A)$. A interpretação do codomínio B em $\mathscr{D}$, ou o objeto "B-interpretado", é representada por $F(B)$.

Na segunda etapa interpretávamos os elementos de G como elementos de $\mathbb{Z}_3$. Isto corresponde agora a *transformar morfismo em morfismo*. Pode parecer bem estranho e desconcertante à primeira vista, mas quando olhamos para o grupo $\langle G, *, e \rangle$ como uma categoria, o conjunto G transforma-se no objeto único da categoria, os elementos de G transformam-se em morfismos e a operação $*$ transforma-se na composição de morfismos! (Veremos como fazer isso no último capítulo, quando essa construção for necessária.) Estamos antecipando este fato apenas para poder dizer que as duas etapas do processo anterior (converter conjunto em conjunto e elemento em elemento) condensam-se agora —por meio da condição 1 da definição de funtor— numa única etapa (converter objeto em objeto e morfismo em morfismo).

3. Quando queríamos nos certificar de que os valores nas células da tabela de multiplicação de $\langle G, *, e \rangle$ estavam corretamente interpretados nas células correspondentes da tabela de adição de $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0 \rangle$, vimos que essa preocupação traduzia-se na equação

$$F(x * y) = F(x) +_3 F(y)$$

Para que nossa interpretação F fosse consistente, todos os pares de elementos $x, y \in G$ deveriam ser soluções da equação acima, onde há duas operações envolvidas. No universo das categorias, porém, só há uma operação: a composição de morfismos. A composição tem significados distintos em cada categoria, mas usamos a mesma notação "$\circ$" para todas elas. Por isso, a equação acima transforma-se em

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

que corresponde à condição 2 da definição de funtor. Observe que o termo $g \circ f$, que aparece no argumento do funtor F, no lado esquerdo da igualdade, é a composição de dois morfismos na categoria $\mathscr{C}$. No lado direito da igualdade, porém, a composição $F(g) \circ F(f)$ é realizada na categoria $\mathscr{D}$. São dois processos, em geral, distintos, apesar de o símbolo usado para representá-los ser o mesmo.

4. A quarta e última etapa de nossa interpretação de $\langle G, *, e \rangle$ como $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0 \rangle$ consistia num teste simples para verificar se nossa interpretação F transformava elemento neutro em elemento neutro. Como vimos, os elementos neutros para a operação fundamental no universo das categorias (a composição de morfismos) são os morfismos-identidade. Assim, o funtor F deve associar a um elemento neutro qualquer, digamos 1_A, da categoria $\mathscr{C}$, o elemento neutro correspondente ao objeto A interpretado em $\mathscr{D}$, isto é, $F(1_A) = 1_{F(A)}$ (a quarta etapa do processo de interpretação discutido na seção anterior converte-se, assim, na condição 3 da definição de funtor).

5.1.1 Composição de Funtores

Dadas três categorias $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ e $\mathscr{E}$ e dois funtores $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ e $\mathscr{D} \xrightarrow{G} \mathscr{E}$, podemos realizar a composição dos funtores F e G, da forma esperada:

a composição

$$G \circ F \colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{E}$$

é um funtor de $\mathscr{C}$ em $\mathscr{E}$ definido da seguinte maneira:

(i) Para todo objeto C em $\mathscr{C}$, temos:

$$(G \circ F)(C) = G(F(C))$$

(ii) Para todo $\mathscr{C}$-morfismo $f \colon A \to B$, temos:

$$\begin{aligned}[G \circ F](f \colon A \to B) &= G[F(f) \colon F(A) \to F(B)] \\ &= G(F(f)) \colon G(F(A)) \to G(F(B))\end{aligned}$$

Para evitar o festival de parênteses e colchetes que costuma aparecer em expressões como essas, a maioria dos autores simplesmente descarta alguns deles, escrevendo, por exemplo:

$$\begin{aligned}[G \circ F](f \colon A \to B) &= G(Ff \colon FA \to FB) \\ &= GF(f) \colon GF(A) \to GF(B)\end{aligned}$$

esta é apenas uma questão de gosto e legibilidade. Em nosso texto, regra geral, adotaremos a expressão mais explícita possível, e não a mais econômica, tendo em vista que se trata de um material para iniciantes.

5.1.2 Exercícios

1. Com a definição de composição de funtores dada acima, faça o seguinte:

(a) Calcule $[G \circ F](1_C)$, para verificar se a composição $G \circ F$ preserva morfismos-identidade.

(b) Dados $h \colon A \to B$ e $k \colon B \to C$ em $\mathscr{C}$, calcule $[G \circ F](k \circ h)$, para verificar se $G \circ F$ preserva a composição de morfismos.

(Ao final, você precisará estabelecer a seguinte igualdade: $[G \circ F](k \circ h) = [G \circ F](k) \circ [G \circ F](h)$. Note que, nessa expressão, os símbolos de composição representam três processos distintos. Temos composição entre funtores, composição de morfismos em $\mathscr{C}$ e composição de morfismos em $\mathscr{E}$.)

2. Para uma categoria qualquer $\mathscr{C}$, podemos definir o funtor-identidade $1_{\mathscr{C}}\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ da seguinte maneira:

(i) Ele não faz nada com os objetos:

$$1_{\mathscr{C}}(A) = A$$

para todo objeto A de $\mathscr{C}$; e

(ii) Não faz nada com os morfismos:

$$\begin{aligned} 1_{\mathscr{C}}(f\colon A \to B) &= 1_{\mathscr{C}}(f)\colon 1_{\mathscr{C}}(A) \to 1_{\mathscr{C}}(B) \\ &= f\colon A \to B \end{aligned}$$

para todo $\mathscr{C}$-morfismo $f\colon A \to B$.

E agora que possuímos o número 1 para a multiplicação de funtores, podemos definir inversos para essa multiplicação![4]

Definição 5.2. *Seja $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ um funtor entre as categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$. O funtor F é chamado de **invertível** ou ainda de um **isomorfismo** quando existe um segundo funtor $G\colon \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ para o qual verificam-se as igualdades:*

$$(i)\ F \circ G = 1_{\mathscr{D}}$$

e

$$(ii)\ G \circ F = 1_{\mathscr{C}}$$

*Neste caso, dizemos ainda que as categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são **isomorfas**. Notação: $\mathscr{C} \cong \mathscr{D}$.*

Pode-se demonstrar, como sempre acontece nesses casos, que o inverso de um funtor F, quando existe, é único. Por isso, falamos "o inverso" de F, e, em vez de chamá-lo de G, como na definição acima, chamamos esse inverso de F^{-1}.

3. Você certamente percebeu que categorias, funtores, funtor-identidade e composição de funtores são os ingredientes típicos de uma... categoria! Uma categoria de categorias! Definir essa ideia de forma precisa é um pouco trabalhoso (as tentativas óbvias rapidamente conduzem ao Paradoxo de Russell). Não nos preocuparemos com isso agora. Vamos apenas conservar em mente uma noção intuitiva de que as categorias com as quais estivermos trabalhando poderão ser reunidas em uma categoria maior ainda, isto é, cada categoria isolada $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$, etc., será um mero objeto e os funtores entre elas serão meros morfismos. Assim, se duas categorias $\mathscr{C}$ e

4 Agora que dispomos de funtores-identidade e da noção de composição de funtores, podemos definir funtores invertíveis.

$\mathscr{D}$ são isomorfas, isto quer dizer que há um morfismo invertível (um funtor invertível) entre elas em uma categoria formada por categorias.

Sendo assim, prove que:

(a) A composição de funtores é associativa: dados $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ e $H\colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}$, verifica-se

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$$

(b) Valem as leis de identidade para a composição de morfismos em uma categoria de categorias: se $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, então

$$F \circ 1_{\mathscr{C}} = F$$

e

$$1_{\mathscr{D}} \circ F = F$$

5.2 O TEOREMA DE CAYLEY

Dissemos anteriormente que certas categorias (as categorias pequenas) reduzem-se, de certo modo, a categorias de conjuntos e funções. Veremos a formulação precisa dessa ideia no Teorema 1, apresentado na próxima seção. Talvez a melhor maneira de compreender o significado desse teorema, o primeiro apresentado no livro de Steve Awodey, seja seguir a sugestão desse autor e recordar primeiramente o significado do Teorema de Cayley para grupos.

Na discussão que fizemos na seção anterior, vimos que um *grupo abstrato* $\langle G, *, e\rangle$ podia ser interpretado como um *grupo concreto*, por exemplo, como $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0\rangle$. Descrevemos o processo de interpretação como a construção de uma aplicação F entre G e $\mathbb{Z}_3$ que deveria satisfazer algumas condições, discutidas nas *quatro etapas* da construção da interpretação. Aquelas condições, se quisermos, podem ser vistas apenas como as características de um *homomorfismo de grupos*, isto é, uma transformação, função ou aplicação que *preserva a estrutura de grupo*. Formalmente:

Definição 5.3. *Se* $\langle G, *, e\rangle$ *e* $\langle H, \cdot, u\rangle$ *são grupos quaisquer, uma função* $\phi\colon G \to H$ *é chamada de um* ***homomorfismo de grupos*** *se, para quaisquer* $g_1, g_2 \in G$, *verifica-se*

$$\phi(g_1 * g_2) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2)$$

Você pode estar se perguntando onde foi parar a condição a respeito dos elementos neutros de $\langle G, *, e\rangle$ e $\langle H, \cdot, u\rangle$. No caso dos grupos, como todo elemento possui inverso, a condição sobre os elementos neutros torna-se uma consequência da definição de homomorfismo. Vejamos como verificar este fato. A notação que usamos para os grupos nos diz que e é o elemento neutro de $\langle G, *, e\rangle$ e que u é o elemento neutro de $\langle H, \cdot, u\rangle$. Como ϕ é uma função, deve, obrigatoriamente, atribuir um valor a e. Suponhamos que $\phi(e) = h$, $h \in H$. A equação $\phi(g_1 * g_2) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2)$ vale para quaisquer elementos em G. Como $e = e * e$, em particular temos:

$$h = \phi(e) = \phi(e * e) = \phi(e) \cdot \phi(e) = h \cdot h$$

Assim,

$$h \cdot h = h$$

A equação acima nos diz que h é um elemento *idempotente* em $\langle H, \cdot, u\rangle$ —isto é, todas as suas **potências** h^n são **idênticas** e têm o mesmo valor h. Por exemplo, $h^3 = h^2 \cdot h = (h \cdot h) \cdot h = h \cdot h = h$. Deixamos para você, como exercício, verificar que num grupo qualquer o único elemento idempotente é o elemento neutro do grupo[5]. Assim, h é o elemento neutro de $\langle H, \cdot, u\rangle$, isto é, $h = u$ e, portanto, ϕ associa elemento neutro a elemento neutro. Como vemos, tal condição é consequência da equação que define homomorfismo (portanto, uma condição necessária).

5 Se h é idempotente, então $h \cdot h = h$. Agora, multiplique os dois lados da igualdade por um fator conveniente.

Eventualmente, os conjuntos G e H podem possuir o mesmo número de elementos e, além disso, o homomorfismo $\phi\colon G \to H$ pode ser uma função injetora. Neste caso, ϕ seria uma função bijetora entre G e H que preserva a estrutura de grupo, ou seja, seria um homomorfismo bijetor, mais conhecido como *isomorfismo de grupos*.

Para interpretar o *grupo abstrato* $\langle G, *, e\rangle$ como o *grupo concreto* $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0\rangle$, construímos um homomorfismo bijetor F, isto é, um isomorfismo de grupos F.

O Teorema de Cayley nos diz que é possível generalizar este procedimento: dado um grupo abstrato qualquer $\langle G, *, e\rangle$, sempre podemos interpretá-lo como um grupo concreto, mas não é necessário escolher um grupo concreto particular — como fizemos com $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0\rangle$. Em vez disso, interpretamos $\langle G, *, e\rangle$ como um *grupo de permutações* (funções bijetoras) *definidas a partir do próprio conjunto subjacente* G. A demonstração do teorema consiste, então, em construir tal interpretação numa situação completamente geral, em que nada sabemos a respeito de G, de seus elementos ou da operação $*$. Em outras palavras, o teorema nos diz que sempre conseguimos construir um *modelo concreto* para qualquer grupo abstrato. Por isso ele é às vezes chamado de um "teorema de representação para grupos": *a representação de Cayley*.

Antes de demonstrarmos o teorema em sua forma geral, é instrutivo considerarmos um exemplo.

Tomemos o próprio grupo $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0\rangle$, dos inteiros módulo três com a adição. O conjunto subjacente $\mathbb{Z}_3$ é formado por três elementos: $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Podemos definir seis funções bijetoras nesse conjunto, isto é, funções $g\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ invertíveis. Quando olhamos para os elementos de $\{0, 1, 2\}$ como meros símbolos ou letras e desenhamos o conjunto de uma forma apropriada, a ação de uma função bijetora nesse conjunto de "letras" efetua meramente uma "troca de posição" entre as "letras". Por isso, em Teoria de Grupos, essas funções são chamadas de *permutações* definidas no conjunto $\mathbb{Z}_3$. O conjunto com as seis permutações $\{g_0, g_1, g_2, ..., g_5\}$, equipado com a composição usual de funções, forma um grupo, denominado *grupo simétrico* S_3 *das permutações em 3 letras*. Generalizando, se houver n elementos no conjunto subjacente, teremos o *grupo simétrico* S_n *das permutações em* n *letras*.

A interpretação de cada elemento de $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ como uma permutação $g\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ pode ser feita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F(0) = g_0\colon \mathbb{Z}_3 &\longrightarrow \mathbb{Z}_3 \\ n &\longmapsto g_0(n) = 0 +_3 n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(1) = g_1\colon \mathbb{Z}_3 &\longrightarrow \mathbb{Z}_3 \\ n &\longmapsto g_1(n) = 1 +_3 n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(2) = g_2\colon \mathbb{Z}_3 &\longrightarrow \mathbb{Z}_3 \\ n &\longmapsto g_2(n) = 2 +_3 n \end{aligned}$$

As três permutações acima, $F(0) = g_0, F(1) = g_1, F(2) = g_2$, com a composição usual de funções, formam agora um grupo (verifique), dado pela seguinte tabela:

$+$	g_0	g_1	g_2
g_0	g_0	g_1	g_2
g_1	g_1	g_2	g_0
g_2	g_2	g_0	g_1

Este grupo, evidentemente, é isomorfo ao grupo $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0\rangle$. Por outro lado, o grupo acima é um subgrupo do grupo simétrico S_3 das permutações em 3 letras.

Por isso, dizemos que $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0\rangle$ *é isomorfo a um grupo de permutações* ou, de forma mais geral, *isomorfo a um subgrupo de um grupo de permutações*.

Observe que, na interpretação acima, $F(\mathbb{Z}_3) = \{F(0), F(1), F(2)\} = \{g_0, g_1, g_2\}$, ou seja, o conjunto $\mathbb{Z}_3$ é transformado em um conjunto de permutações e cada elemento k de $\mathbb{Z}_3$ é transformado em uma permutação $F(k) = g_k \colon \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$, definida por $g_k(n) = k +_3 n$.

Nas seções seguintes, para evitar o emprego de subíndices, adotaremos a seguinte convenção:

1) Para um grupo qualquer $\langle G, *, e\rangle$, o conjunto $F(G)$ de permutações fabricadas com os elementos de G será representado simplesmente com $\bar{G}$. Assim,

$$F(G) = \bar{G}$$

2) Cada permutação $F(g) \colon G \longrightarrow G$ fabricada a partir dos elementos g em G, por sua vez, será denotada simplesmente por $\bar{g}$. Então,

$$\begin{aligned} F(g) \colon G &\longrightarrow G \\ \bar{g} \colon G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto \bar{g}(h) = g * h \end{aligned}$$

Vejamos agora o Teorema de Cayley, em sua formulação geral.

Proposição 5.1. ***(Teorema de Cayley).*** *Todo grupo $\langle G, *, e\rangle$ é isomorfo a um grupo de permutações.*

Precisamos construir um grupo de permutações a partir das hipóteses. Mas só há uma hipótese: a de que $\langle G, *, e\rangle$ é um grupo. Logo, nosso grupo concreto tem que ser construído a partir de $\langle G, *, e\rangle$. Escreveremos $\langle \bar{G}, \circ, \bar{e}\rangle$ para denotar a interpretação de $\langle G, *, e\rangle$ como um grupo de permutações. Assim, $\langle \bar{G}, \circ, \bar{e}\rangle$ será a *representação de Cayley* do grupo $\langle G, *, e\rangle$. Construiremos essa representação seguindo os mesmos passos que adotamos no exemplo com $\langle \mathbb{Z}_3, +, 0\rangle$, dado anteriormente.

Demonstração.

- Usaremos o próprio conjunto G para criar nosso conjunto de permutações $\bar{G}$.

  (Esta é a primeira etapa do processo de interpretação: associar conjunto subjacente a conjunto subjacente.)

- Interpretaremos cada elemento $g \in G$ como uma permutação $\bar{g} \in \bar{G}$. Uma permutação $\bar{g}$ é, como vimos, uma função bijetora $\bar{g}\colon G \to G$, tal que, para todo $h \in G$, $\bar{g}$ multiplica a *variável* h pela *constante* g (pela esquerda):

  $$\bar{g}(h) = g * h$$

  (Segunda etapa: os elementos do grupo $\langle G, *, e\rangle$ são interpretados como permutações, isto é, como os elementos do subgrupo $\langle \bar{G}, \circ, \bar{e}\rangle$ do grupo de permutações construído sobre G.)

  Observemos que aqui há um lema implícito: provar que $\bar{g}$, do modo como foi definida, realmente é uma bijeção definida em G (para isso, é preciso exibir a função inversa de $\bar{g}$). Deixamos essa tarefa para você.[6]

- As duas etapas acima parecem suficientes para a construção da interpretação F. Temos $F(G) = \bar{G}$ (conjunto associado a conjunto) e $F(g) = \bar{g}$ (elemento associado a elemento).

  Não podemos, entretanto, simplesmente afirmar que F é um homomorfismo de grupos. Precisamos demonstrar isso. Sejam g_1 e g_2 elementos quaisquer em G. Temos,

  para todo $h \in G$,

  (i) $F(g_1 * g_2)(h) = \overline{(g_1 * g_2)}(h) = (g_1 * g_2) * h.$

  (ii) $[F(g_1) \circ F(g_2)](h) = F(g_1)[F(g_2)(h)] = \overline{g_1}(\overline{g_2}(h)) = \overline{g_1}(g_2 * h) = g_1 * (g_2 * h).$

  Como a operação de grupo é associativa, $g_1 * (g_2 * h) = (g_1 * g_2) * h$.

  Vemos assim, por (i) e (ii), que

  $$F(g_1 * g_2) = F(g_1) \circ F(g_2)$$

  Portanto, F é de fato um homomorfismo de grupos.

[6] Como g possui um inverso g^{-1} em G, este inverso, quando visto como permutação, é um candidato natural ao cargo de função inversa de $\bar{g}$. Lembre-se que para mostrar que duas funções são inversas uma da outra é necessário verificar duas equações.

- Agora, para provar que F é um isomorfismo, basta mostrar que F é invertível, exibindo o inverso de F.

  Temos:

  (1) $F\colon G \to \bar{G}$, dado por $F(g) = \bar{g}$, e consideremos

  (2) $F'\colon \bar{G} \to G$, dado por $F'(\bar{g}) = \bar{g}(e)$, onde e é o elemento neutro de G.

  Para concluirmos que $\langle G, *, e\rangle$ e $\langle \bar{G}, \circ, \bar{e}\rangle$ são isomorfos é suficiente agora provar que os homomorfismos F e F' definidos acima são inversos um do outro (verifique que F' é realmente um homomorfismo). Temos:

  (I) $(F \circ F')\colon \bar{G} \to \bar{G}$ é tal que, para toda permutação $\bar{g} \in \bar{G}$,

  $$(F \circ F')(\bar{g}) = F(F'(\bar{g})) = F(\bar{g}(e)) = F(g * e) = F(g) = \bar{g}$$

  Portanto, $(F \circ F') = 1_{\bar{G}}$.

  (II) $(F' \circ F)\colon G \to G$ é tal que, para todo elemento g de G,

  $$(F' \circ F)(g) = F'(F(g)) = F'(\bar{g}) = \bar{g}(e) = g * e = g$$

  Portanto, $(F' \circ F) = 1_G$.

  De (I) e (II) concluímos que F' é o inverso de F. Assim, a interpretação $F\colon G \to \bar{G}$ é um isomorfismo. Logo, os grupos $\langle G, *, e\rangle$ e $\langle \bar{G}, \circ, \bar{e}\rangle$ são isomorfos. ■

5.3 TEOREMA 1

De acordo com Steve Awodey,

> O Teorema de Cayley nos diz que qualquer grupo abstrato pode ser representado por um grupo *concreto*, isto é, um grupo de permutações de um conjunto. Este teorema pode ser generalizado para mostrar que qualquer categoria que não seja *muito grande* pode ser representada como uma categoria *concreta*, isto é, uma categoria de conjuntos e funções. (AWODEY, 2010, p. 13, tradução nossa.)

Seguindo a mesma linha de raciocínio usada na demonstração do Teorema de Cayley, vamos construir uma interpretação de uma categoria pequena $\mathscr{C}$ como uma subcategoria[7] $\overline{\mathscr{C}}$ da categoria **Set**, de conjuntos e funções.

Agora, porém, já não estamos mais no andar do edifício correspondente à Teoria de Grupos, e sim num andar superior: o andar da Teoria de Categorias. Por isso, agora, nossa interpretação F será de fato um *funtor* (um homomorfismo de categorias).

Nosso funtor $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set** será construído de modo que a categoria domínio $\mathscr{C}$ seja isomorfa à sua imagem $\overline{\mathscr{C}}$ em **Set**.

Teorema 1. *Toda categoria pequena $\mathscr{C}$ (cuja coleção de morfismos é um conjunto) é isomorfa a uma categoria em que os objetos são conjuntos e em que os morfismos são funções.*

Demonstração.

Como vimos, um funtor associa objeto a objeto e morfismo a morfismo. Assim, definimos:

(I) Um objeto qualquer A da categoria original $\mathscr{C}$ será interpretado pelo funtor F como um conjunto $\bar{A}$ (em **Set**), formado por todos os $\mathscr{C}$-morfismos f da forma $f\colon X \to A$, isto é, morfismos f cujo codomínio é o objeto A. Em símbolos,

$$F(A) = \bar{A} = \{f \text{ na categoria } \mathscr{C} \mid A = cod(f)\}$$

(II) Um $\mathscr{C}$-morfismo qualquer $g\colon A \to B$ será transformado por F numa função $\bar{g}\colon \bar{A} \to \bar{B}$ (em **Set**):

$$F(g\colon A \to B) = F(g)\colon F(A) \to F(B) = \bar{g}\colon \bar{A} \to \bar{B}$$

[7] A definição precisa de subcategoria será apresentada mais tarde. Por enquanto, é suficiente pensar em subcategoria num sentido intuitivo, como algo que deve ser similar ao conceito de subgrupo ou subespaço vetorial.

Observemos que o domínio de $\bar{g}$ é o conjunto $\bar{A}$, ou seja, os argumentos de $\bar{g}$ serão os $\mathscr{C}$-morfismos f da forma $f\colon X \to A$. Seguindo a ideia do Teorema de Cayley, vamos "multiplicar" a *variável* $f\colon X \to A$ pela *constante* $g\colon A \to B$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

ou seja, $\bar{g}(f) = g \circ f$, como sugere o diagrama acima.

Agora já podemos verificar se, com tais definições, $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set** realmente é um funtor.

(III) Consideremos uma composição qualquer de morfismos em $\mathscr{C}$, por exemplo a composição de $g\colon A \to B$ e $h\colon B \to C$, isto é, o $\mathscr{C}$-morfismo $h \circ g\colon A \to C$. Temos:

$F(h \circ g\colon A \to C) = F(h \circ g)\colon F(A) \to F(C) = \overline{h \circ g}\colon \bar{A} \to \bar{C}$.

Por definição, $\overline{h \circ g}\colon \bar{A} \to \bar{C}$ "multiplica" as variáveis $f\colon X \to A$ do domínio $\bar{A}$ pela constante $h \circ g\colon A \to C$, conforme o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "(h\circ g)\circ f"] & \\ A \arrow[r, "h\circ g"'] & C \end{tikzcd}$$

Assim, para todo morfismo $f\colon X \to A$ do domínio $\bar{A}$, temos:

$$F(h \circ g)(f) = \overline{h \circ g}(f) = (h \circ g) \circ f \quad (*)$$

Por outro lado, consideremos agora a seguinte composição em **Set**:

$$F(h) \circ F(g)\colon \bar{A} \to \bar{C}$$

Para todo morfismo $f\colon X \to A$ do domínio $\bar{A}$, temos:

$$[F(h) \circ F(g)](f) = (\bar{h} \circ \bar{g})(f) = \bar{h}(\bar{g}(f)) = \bar{h}(g \circ f) = h \circ (g \circ f) \quad (**)$$

Como a composição de morfismos (em qualquer categoria) é associativa, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Logo, por $(*)$ e $(**)$ (e considerando que $F(h \circ g)$ e $F(h) \circ F(g)$ possuem o mesmo domínio e o mesmo contradomínio), concluímos que

$$F(h \circ g) = F(h) \circ F(g)$$

(IV) Para ter certeza de que F é realmente um funtor, precisamos agora verificar a última condição da definição, ou seja, precisamos nos certificar de que, do modo como foi definido, F preserva identidades.

Consideremos então um morfismo-identidade qualquer em $\mathscr{C}$, digamos $1_A\colon A \to A$. Temos:

$$F(1_A\colon A \to A) = F(1_A)\colon F(A) \to F(A) = \overline{1_A}\colon \bar{A} \to \bar{A}$$

Então, por definição, a função $\overline{1_A}$ "multiplica" as *variáveis* $f\colon X \to A$ do domínio $\bar{A}$ pela constante $1_A\colon A \to A$, conforme o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "1_A \circ f"] & \\ A \arrow[r, "1_A"'] & A \end{tikzcd}$$

Então, para toda função $f\colon X \to A$ do domínio $\bar{A}$,

$$\overline{1_A}(f) = 1_A \circ f = f = 1_{\overline{A}}(f)$$

Assim, $\overline{1_A}$ e $1_{\overline{A}}$ são ambas funções com domínio e contradomínio $\bar{A}$ e assumem os mesmos valores em todos os elementos do domínio comum $\bar{A}$. Conclusão: $\overline{1_A} = 1_{\overline{A}}$, ou seja,

$$F(1_A) = \overline{1_A} = 1_{\overline{A}} = 1_{F(A)}$$

Em resumo, vimos que:

(1) F associa objeto a objeto e morfismo a morfismo:

$$F(g\colon A \to B) = F(g)\colon F(A) \to F(B) = \bar{g}\colon \bar{A} \to \bar{B}$$

(2) F preserva a composição de morfismos:

$$F(h \circ g) = F(h) \circ F(g)$$

(3) F associa o morfismo-identidade de um objeto ao morfismo-identidade do objeto interpretado (leva identidade em identidade):

$$F(1_A) = 1_{F(A)}$$

Temos, assim, um funtor F entre as categorias $\mathscr{C}$ e **Set**.

Agora, vamos mostrar que a imagem de $\mathscr{C}$ em **Set** é uma subcategoria de **Set** isomorfa à $\mathscr{C}$.

A imagem de $\mathscr{C}$ por F será denotada $\overline{\mathscr{C}}$. Deveríamos mostrar agora que $\overline{\mathscr{C}}$ é de fato uma categoria, pois nem sempre a imagem de um funtor é uma subcategoria da categoria codomínio[8].

Observemos o seguinte:

(1) Os objetos de $\overline{\mathscr{C}}$ serão conjuntos X tais que $X = \bar{A} = F(A)$, para algum objeto A de $\mathscr{C}$;

(2) Os morfismos serão as funções $\bar{g}\colon \bar{A} \to \bar{B}$, ou seja, a imagem por F de morfismos $g\colon A \to B$ de $\mathscr{C}$.

É imediato verificar que, com tais definições, $\overline{\mathscr{C}}$ é de fato uma categoria (uma subcategoria de **Set**).

Agora, para mostrarmos que $\mathscr{C}$ e $\overline{\mathscr{C}}$ são categorias isomorfas, vamos construir um funtor $\bar{F}\colon \mathscr{C} \longrightarrow \overline{\mathscr{C}}$ e mostrar que esse funtor $\bar{F}$ possui um inverso.

Definimos:

(i) $\bar{F}(A) = F(A) = \bar{A}$

(ii) $\bar{F}(f) = F(f) = \bar{f}$

O mesmo argumento que mostra que F é um funtor de $\mathscr{C}$ em **Set**, mostra que $\bar{F}$ é um funtor de $\mathscr{C}$ em $\overline{\mathscr{C}}$.

Finalmente, vamos construir o inverso $G\colon \overline{\mathscr{C}} \longrightarrow \mathscr{C}$ de $\bar{F}$.

(1) Observe que se $\bar{A} = \bar{B}$, então $A = B$.

Em outras palavras, $F(A) = F(B) \implies A = B$, o que significa que nosso funtor F é "injetivo em objetos". Como poderíamos verificar tal fato? A igualdade $\bar{A} = \bar{B}$ é uma igualdade de conjuntos: todo elemento de $\bar{A}$ é elemento de $\bar{B}$, e vice-versa. Então, todo $\mathscr{C}$-morfismo h em $\bar{A}$ pertence também a $\bar{B}$. Assim, em particular, $1_A\colon A \to A$, que pertence a $\bar{A}$, é também um elemento de $\bar{B}$, o que significa que 1_A é da forma $1_A\colon X \to B$. Ora, como um mesmo morfismo não pode possuir mais de um domínio ou mais de um codomínio, pelo mandamento que vimos na definição de categoria, temos $X = A$ e $B = A$, como queríamos.

Portanto, como cada conjunto $X = \bar{A}$ (objeto de $\overline{\mathscr{C}}$) é a imagem de um único objeto A de $\mathscr{C}$, podemos definir:

$$G(\bar{A}) = A$$

[8] Veja um contra-exemplo em (BARR; WELLS, 2012, p. 67).

(2) Agora temos uma situação delicada para analisar. Podem existir muitas funções (inteiramente arbitrárias) em **Set** entre dois conjuntos $X = \bar{A}$ e $Y = \bar{B}$ que nada têm a ver com funções do tipo $\bar{f}\colon \bar{A} \to \bar{B}$, isto é, funções que são a imagem, por F, de algum $\mathscr{C}$-morfismo $f\colon A \to B$. Entretanto, se $h\colon \bar{A} \to \bar{B}$ é tal que $h = \bar{f}$, isto é, $h = F(f)$, então obviamente $f\colon A \to B$. Ou seja, o funtor G que estamos construindo, ao estar definido apenas na imagem $\overline{\mathscr{C}}$ em **Set** da categoria $\mathscr{C}$, não será aplicado sobre as funções arbitrárias entre $X = \bar{A}$ e $Y = \bar{B}$.

Por outro lado, se $\bar{f} = \bar{g}\colon \bar{A} \to \bar{B}$, então $\bar{f}(1_A) = \bar{g}(1_A)$, ou seja, $f \circ 1_A = g \circ 1_A$, o que implica $f = g$. Em resumo, cada função $\bar{f}$ é a imagem, por F, de um único morfismo f em $\mathscr{C}$. Logo, podemos definir

$$G(\bar{f}) = f$$

para todo morfismo $\bar{f}$ em $\overline{\mathscr{C}}$.

Com tais definições, G é um funtor de $\overline{\mathscr{C}}$ em $\mathscr{C}$ tal que $F \circ G = 1_{\overline{\mathscr{C}}}$ e $G \circ F = 1_{\mathscr{C}}$.

Logo, $\mathscr{C}$ e $\overline{\mathscr{C}}$ são categorias isomorfas. ■

5.3.1 Exercício

1. Considere a seguinte categoria pequena $\mathscr{C}$:

(1) Os objetos são as três formas geométricas: $\triangle$, $\square$, $\bigcirc$, um triângulo, um quadrado e um círculo.

(2) Os morfismos são os seguintes: $f\colon \triangle \to \bigcirc$, $g\colon \square \to \bigcirc$, $h\colon \triangle \to \square$, $k\colon \square \to \triangle$.

Além desses, cada figura possui seu morfismo-identidade, que é a transformação-idêntica, que não faz nada com a figura: $1_Q\colon \square \to \square$, $1_T\colon \triangle \to \triangle$ e $1_C\colon \bigcirc \to \bigcirc$. Nessa categoria valem as seguintes relações: $k \circ h = 1_T$, $h \circ k = 1_Q$, $g \circ h = f$ e $f \circ k = g$.

Cada morfismo pode ser interpretado como uma transformação da figura domínio na figura codomínio. Assim, o quadrado e o triângulo são transformados no círculo. O círculo só é transformado no próprio círculo e o processo que transforma o quadrado no triângulo é reversível.

Com esses dados, e usando as ideias estudadas no Teorema 1, construa a representação de $\mathscr{C}$ como uma categoria $\overline{\mathscr{C}}$ de conjuntos e funções. Depois, verifique que $\mathscr{C}$ e $\overline{\mathscr{C}}$ são isomorfas.

(Dica: Os objetos de $\overline{\mathscr{C}}$ serão os conjuntos $\overline{\triangle}$, $\overline{\square}$, $\overline{\bigcirc}$ e os morfismos serão funções da forma $\bar{f}\colon \overline{\triangle} \to \overline{\bigcirc}$.)

6 A NOTAÇÃO-HOM

Usamos uma imitação do Teorema de Cayley para grupos com o objetivo de provar que toda categoria pequena é isomorfa a uma categoria em que os objetos são conjuntos e em que os morfismos são funções. Outra forma de se referir a isto é dizer que inserimos uma cópia isomorfa da categoria pequena $\mathscr{C}$ dentro da categoria **Set** dos conjuntos. Qual o propósito de fazer isso? Em tese, certos problemas poderiam ser mais facilmente resolvidos usando a cópia isomorfa de $\mathscr{C}$, porque conhecemos muito bem a álgebra da composição de funções e diversas propriedades úteis da categoria dos conjuntos. É como traduzir um texto de um idioma estrangeiro que ainda não compreendemos muito bem para nossa língua materna. A tradução e o original (teoricamente) dizem a mesma coisa, mas em nosso próprio idioma sempre conseguimos uma compreensão, de certa forma, superior. Conjuntos e funções são nosso idioma materno. Fomos treinados desde crianças a pensar com eles.

Uma observação sobre o adjetivo *pequena*. Uma categoria pequena não é necessariamente *pequena* no sentido intuitivo dessa palavra. Para merecer o rótulo *pequena*, exige-se da categoria que seja formada por um conjunto de morfismos (e outro de objetos). Esses conjuntos, no entanto, podem possuir qualquer tamanho, qualquer cardinalidade. Por exemplo, pensemos na coleção de morfismos da categoria determinada por $\langle \mathbb{Z}^*, \mid \rangle$. O número 1 é o objeto inicial dessa categoria: um divisor de todos os números. Apenas para o 1, haverá uma infinidade de morfismos $1 \to a$, em que a é um inteiro qualquer em $\mathbb{Z}^*$. Para o 2, haverá uma infinidade de morfismos $2 \to b$, em que b é um inteiro par, positivo ou negativo, e assim sucessivamente. Determinar a cardinalidade do conjunto de morfismos dessa categoria é um interessante problema de aritmética transfinita: somar uma quantidade infinita (enumerável) de parcelas iguais a $|\mathbb{N}|$. O resultado dessa operação é um pouco decepcionante, mas, de qualquer forma, continua sendo infinito, ou seja, maior do que qualquer número real concebível. É evidente, portanto, que não é nada "pequena" essa coleção de morfismos. Mas, sendo um conjunto legítimo, dizemos que a categoria determinada por $\langle \mathbb{Z}^*, \mid \rangle$ é "pequena".

6.1 CONJUNTO-HOM

Neste capítulo vamos introduzir a "notação-hom". "Hom" vem de **hom**omorfismo. Se quisermos nos referir ao conjunto de homomorfismos entre um grupo específico G e um grupo específico H, nesta ordem, podemos escrever Homomorfismos(G, H). Com o tempo, veremos que é melhor abreviar e escrever Hom(G, H). Homomorfismos são morfismos que preservam estrutura: existem homomorfismos de grupos, de aneis, entre espaços vetoriais (chamados de *transformações lineares*), entre espaços topológicos (chamados de *funções contínuas*), entre categorias (chamados de *funtores*), e assim por diante. Em resumo, *homomorfismo* é um termo genérico para designar os morfismos de determinada categoria. Não é sempre usado com esse propósito, pois, como vimos acima, costumamos ter nomes especiais para os morfismos. Mas as iniciais "Hom" são ainda usadas para designar o conjunto de morfismos entre dois objetos quaisquer de determinada categoria.

Exemplos.

1. O conjunto de morfismos entre os objetos $A = \{1\}$ e $B = \{2,\ 3\}$ na categoria **Set** é representado por Hom(A, B). Assim, Hom(A, B) é o conjunto de funções entre A e B (que é formado por duas funções, a função $f : A \to B$ definida por $f(1) = 2$ e a função $g : A \to B$ dada por $g(1) = 3$). Escrevemos:

$$\text{Hom}(A, B) = \{f, g\}$$

2. Trocando as posições de A e B no exemplo anterior, obtemos o conjunto Hom(B, A), formado por todas as funções entre $B = \{2,\ 3\}$ e $A = \{1\}$. Mas só há uma função entre B e A: "a função constante igual a 1", isto é, a função que associa todos os elementos de B ao elemento único de A. Essa função pode ser chamada de u (de "única"). Assim,

$$\text{Hom}(B, A) = \{u\}$$

3. Só há um homomorfismo de grupos entre $\mathbb{Z}_7$ e $\mathbb{Z}_4$, o homomorfismo trivial z (de "zero"), que associa todos os elementos de $\mathbb{Z}_7$ ao elemento neutro de $\mathbb{Z}_4$. Portanto, na categoria dos grupos

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_4) = \{z\}$$

4. Na categoria determinada por $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$, em que $A = \{1, 2\}$, não há morfismos entre os objetos $\{1\}$ e $\{2\}$, não importando a ordem em que sejam considerados. Logo,

$$\text{Hom}(\{1\}, \{2\}) = \text{Hom}(\{2\}, \{1\}) = \emptyset$$

5. Na categoria determinada por $\langle \mathbb{Z}^*, \mid \rangle$, só há um morfismo em que o objeto inicial 1 figura na posição de codomínio: seu morfismo-identidade $1 \to 1$.[1] Por outro lado, para um número primo qualquer, por exemplo, para o objeto 11, haverá dois morfismos em que tal objeto figura como codomínio: $1 \to 11$ e $11 \to 11$, este último corresponde, evidentemente, ao seu morfismo-identidade. Note que há, portanto, pelo menos uma tradução categorial para a diferença entre a *unidade* e os números primos, uma razão substancial para não considerarmos o número 1 como um primo, e sim como uma entidade superior (ele é um objeto inicial, um objeto muito mais importante do que os demais). E finalmente, há infinitos morfismos em que um inteiro qualquer figura como domínio (o que corresponde à coleção de seus múltiplos).

[1] Nessa categoria, só o objeto inicial tem a permissão de enviar flechas para o objeto inicial (que, por definição, serão todas iguais e corresponderão ao morfismo-identidade do objeto inicial). Mas existem categorias em que outros objetos enviam flechas para o objeto inicial! Cf. (LAWVERE; SCHANUEL, 2009, p. 212).

Entretanto, apesar dessas interessantes questões, uma vez fixados dois inteiros a e b, o conjunto de morfismos entre eles é sempre vazio ou unitário:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(1,1) &= \{1 \to 1\} \\ \text{Hom}(1,11) &= \{1 \to 11\} \\ \text{Hom}(2,3) &= \emptyset \end{aligned}$$

Quando estamos nos referindo a mais de uma categoria ao mesmo tempo, para evitar possíveis confusões, usamos rótulos como subíndices das iniciais Hom. Nos exemplos anteriores, supondo que **Grp** denota a categoria dos grupos, poderíamos ter escrito: $\text{Hom}_{\text{Set}}(A,B) = \{f,g\}$, $\text{Hom}_{\text{Set}}(B,A) = \{u\}$ e $\text{Hom}_{\text{Grp}}(\mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_4) = \{z\}$.

Agora, observemos o seguinte: a categoria **Set** de conjuntos e funções é, como vimos, uma categoria grande, pois sua coleção de objetos deve conter todos os conjuntos concebíveis, e essa coleção não é um conjunto, e sim uma classe. Também a coleção de morfismos de **Set** não é um conjunto. Entretanto, consideramos que entre dois conjuntos A e B de **Set** existe um conjunto $\text{Hom}(A,B)$ de funções, isto é, um conjunto legítimo de morfismos entre dois objetos quaisquer.

Essas categorias, em que a coleção de morfismos *entre dois objetos quaisquer* X e Y é sempre um conjunto, o conjunto $\text{Hom}(X,Y)$, são chamadas de *categorias localmente pequenas*. Todas as categorias a que teremos oportunidade de nos referir (e a que já nos referimos) neste trabalho são localmente pequenas. As categorias localmente pequenas são tão comuns (e os exemplos de categorias diferentes devem ser tão raros) que alguns autores definem categoria como sendo *apenas* as localmente pequenas. Confira, por exemplo, a definição de categoria em (ADAMEK; HERRLICH; STRECKER, 2004, p. 21).[2]

6.2 FUNÇÃO-HOM

Além dos conjuntos-hom, existem também as "funções-hom"! O nome é estranho, mas são funções bem simples, parecidas com a função $\bar{g}$ usada no capítulo anterior.

Consideremos a seguinte composição em uma categoria qualquer $\mathscr{D}$ (pequena ou grande, não importa):

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

[2] Disponível em
http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/ (acesso em 06 de julho de 2018).

O morfismo f é um morfismo específico entre C e A na categoria $\mathscr{D}$, mas talvez existam vários outros. Podemos, então, considerar a situação em que há vários morfismos entre C e A, isto é, elementos em $\mathsf{Hom}(C, A)$ e que a composição acima descreve um caso particular de um processo mais geral: obter um morfismo em $\mathsf{Hom}(C, B)$, a partir de um morfismo qualquer de $\mathsf{Hom}(C, A)$, usando a "constante" $g\colon A \to B$. Este processo é uma função de conjuntos, chamada de *função-hom*, e denotada $\mathsf{Hom}(C, g)$:

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}(C, g)\colon \mathsf{Hom}(C, A) &\longrightarrow \mathsf{Hom}(C, B) \\ h &\longmapsto \mathsf{Hom}(C, g)(h) = g \circ h \end{aligned}$$

A função $\mathsf{Hom}(C, g)$ pode ser grosseiramente chamada de "multiplica por g pela esquerda".

Poderíamos desejar multiplicar pela constante g pela direita, e não pela esquerda, como no diagrama:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f\circ g"] & \\ B \arrow[rr, "f"'] & & D \end{tikzcd}$$

Ou seja, também podemos olhar para a composição acima como um caso particular de um processo mais geral. Consideramos que existam diversos morfismos em $\mathsf{Hom}(B, D)$, f é apenas um deles, e nosso objetivo é obter morfismos em $\mathsf{Hom}(A, D)$, usando a constante $g\colon A \to B$. Este processo define outra função-hom, denotada $\mathsf{Hom}(g, D)$:

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}(g, D)\colon \mathsf{Hom}(B, D) &\longrightarrow \mathsf{Hom}(A, D) \\ f &\longmapsto \mathsf{Hom}(g, D)(f) = f \circ g \end{aligned}$$

Poderíamos dizer que a função $\mathsf{Hom}(g, D)$ "multiplica por g pela direita".

Observe que estamos traduzindo eventos que estão ocorrendo numa categoria qualquer $\mathscr{D}$ na linguagem de conjuntos e funções, isto é, descrevendo fenômenos da categoria $\mathscr{D}$ como fenômenos em **Set**.

Quando a categoria $\mathscr{D}$ é pequena, conseguimos uma reprodução exata desses fenômenos em **Set** usando a cópia isomorfa de $\mathscr{D}$ que aprendemos a construir. Mas se a categoria $\mathscr{D}$ não for pequena, haverá um meio de criar uma cópia isomorfa de $\mathscr{D}$ em **Set** ou em alguma outra categoria bem parecida com **Set**, de modo que possamos continuar usando nossa língua materna? A resposta é *sim*, como veremos.[3] Mas antes de discutir essa questão, precisamos entender melhor o que fizemos no Teorema 1.

A primeira coisa que fizemos na demonstração do Teorema 1 foi verificar o que F faria com um objeto A qualquer de $\mathscr{C}$ ($\mathscr{C}$ é uma categoria pequena). Na ocasião, dissemos:

[3] SPOILER ALERT: É precisamente isto que o Lema de Yoneda nos permite fazer.

Um objeto qualquer A da categoria original $\mathscr{C}$ será interpretado pelo funtor F como um conjunto $\bar{A}$ (em ***Set****), formado por todos os $\mathscr{C}$-morfismos f da forma $f : X \to A$, isto é, morfismos f cujo codomínio é o objeto A. Em símbolos,*

$$F(A) = \bar{A} = \{f \text{ na categoria } \mathscr{C} \mid A = cod(f)\}$$

Na discussão acima, observe que o objeto X no domínio de f está fazendo o papel de uma variável, não é um objeto particular da categoria $\mathscr{C}$. Por isso, o conjunto $F(A) = \bar{A}$ *não é* um conjunto-hom, mas a união de todos os conjuntos-hom em que A aparece na posição de codomínio. Se quiséssemos usar um símbolo para essa união de conjuntos-hom, poderíamos escrever:

$$F(A) = \bar{A} = \bigcup_{X \in \mathscr{C}} \mathsf{Hom}(X, A)$$

À medida que a variável X percorre o conjunto de objetos que formam a categoria pequena $\mathscr{C}$, vamos formando a reunião $\bar{A}$ de todos os $\mathscr{C}$-morfismos que têm codomínio A.[4]

Tendo estabelecido o significado do valor $F(A)$, em **Set**, para qualquer objeto A em $\mathscr{C}$, o próximo passo da construção foi definir o que significaria o valor $F(g : A \to B)$ em **Set**, para um morfismo qualquer $g : A \to B$ em $\mathscr{C}$.

Vamos transcrever a ação de F em g usando a notação-hom:

$$\begin{aligned} F(g : A \to B) &= F(g) : F(A) \longrightarrow F(B) \\ &= \bar{g} : \bar{A} \longrightarrow \bar{B} \\ &= \bar{g} : \bigcup_{X \in \mathscr{C}} \mathsf{Hom}(X, A) \longrightarrow \bigcup_{X \in \mathscr{C}} \mathsf{Hom}(X, B) \end{aligned}$$

Se f é um morfismo qualquer (da categoria $\mathscr{C}$) em $\bar{A} = \bigcup_{X \in \mathscr{C}} \mathsf{Hom}(X, A)$, isto é, $f : X \to A$ para algum objeto X de $\mathscr{C}$, a função $\bar{g}$ aplicada no morfismo f é definida da seguinte maneira: $\bar{g}(f) = g \circ f$. Este cálculo é ilustrado pelo diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Atenção agora: a função $\bar{g}$, imagem em **Set** do morfismo g de $\mathscr{C}$, *não é* uma função-hom, porque não está definida num conjunto-hom, e sim numa reunião de conjuntos-hom. São funções parecidas, pois, como vimos, ambas possuem conjuntos de funções como domínio e contradomínio, e ambas multiplicam variáveis do domínio por uma constante. Mas uma função-hom é definida num conjunto-hom específico, e não numa reunião de conjuntos-hom.

[4] Vemos assim a importância da hipótese de que a categoria $\mathscr{C}$ seja pequena: X percorre o conjunto de objetos de $\mathscr{C}$. Se essa variável estivesse percorrendo uma classe, a união $\bigcup_{X \in \mathscr{C}} \mathsf{Hom}(X, A)$ não seria um conjunto; consequentemente, $F(A) = \bar{A}$ não seria um conjunto.

6.3 CONJUNTO-HOM + FUNÇÃO-HOM = FUNTOR-HOM!

Os funtores mais simples do gênero $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set**, isto é, com imagem na categoria de conjuntos e funções, são os funtores similares ao funtor F usado na demonstração do Teorema 1: eles transformam um objeto A de $\mathscr{C}$ num conjunto $\bar{A}$ e um morfismo $g\colon A \to B$ de $\mathscr{C}$ numa função de conjuntos $\bar{g}\colon \bar{A} \to \bar{B}$. Mas para que isto seja possível, como acabamos de ver, precisamos da hipótese de $\mathscr{C}$ ser uma categoria pequena, pois cada conjunto $\bar{A}$ é definido como uma reunião de conjuntos-hom:

$$\bar{A} = \bigcup_{X \in \mathscr{C}} \mathrm{Hom}(X, A)$$

e essa reunião só forma um conjunto se a variável X percorre um conjunto de objetos em $\mathscr{C}$. Neste caso, F produz uma cópia isomorfa de $\mathscr{C}$ em **Set**.

E quando $\mathscr{C}$ não é uma categoria pequena, o que fazer? Bem, neste caso, não é possível criar uma cópia isomorfa de $\mathscr{C}$ diretamente em **Set**. Em vez disso, como dissemos anteriormente, criamos uma cópia isomorfa de $\mathscr{C}$ em outra categoria, bem parecida com **Set**. Um ingrediente básico desse processo são os *funtores-hom*. Eles são funtores do tipo $H\colon \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set**, isto é, também têm imagem na categoria de conjuntos e funções, mas são um pouco mais restritos que nosso funtor F, usado no Teorema 1, como veremos a seguir.

6.3.1 O funtor-hom covariante

Consideremos $\mathscr{D}$ uma categoria qualquer (pequena ou grande). Vamos construir agora um funtor-hom entre $\mathscr{D}$ e **Set**.

Diferentemente do funtor F usado no Teorema 1, que atuava livremente sobre objetos e morfismos de $\mathscr{C}$, fabricando a partir deles conjuntos e funções sem qualquer restrição, um funtor-hom tem uma ação mais restrita: ele está sempre atrelado a um objeto, uma espécie de *ponto de vista* ou *referencial* na categoria domínio.[5] Assim, para especificar um funtor-hom entre $\mathscr{D}$ e **Set**, precisamos de um ponto de vista em $\mathscr{D}$.

Seja C um objeto ponto de vista em $\mathscr{D}$. Para este objeto C, definimos o funtor $\mathrm{Hom}(C, -)$ da seguinte maneira:

(1) **Ação do funtor Hom$(C, -)$ em objetos de $\mathscr{D}$:**

Para cada objeto A da categoria $\mathscr{D}$, $\mathrm{Hom}(C, -)(A) = \mathrm{Hom}(C, A)$,

ou seja, cada objeto A de $\mathscr{D}$ é transformado em um conjunto-hom (e não em uma reunião de conjuntos-hom). O traço marca a posição a ser ocupada por um objeto, neste caso.

5 Cf. (BARR; WELLS, 2012, p. 77).

(2) **Ação do funtor Hom$(C, -)$ em morfismos de $\mathscr{D}$:**

Para todo morfismo $f\colon A \to B$ de $\mathscr{D}$,

$$\mathsf{Hom}(C,-)(f\colon A \to B) = \mathsf{Hom}(C,f)\colon \mathsf{Hom}(C,A) \longrightarrow \mathsf{Hom}(C,B)$$

Como sempre, o símbolo que dá nome ao funtor se distribui no interior do argumento, termo a termo. No caso acima, a posição marcada pelo traço é ocupada, sucessivamente, por f, A e B, dando origem a uma função-hom! Ou seja, cada morfismo f de $\mathscr{D}$ é transformado pelo funtor Hom$(C, -)$ numa função-hom.

O que essa função-hom faz mesmo? Ela fabrica um morfismo em Hom(C, B), a partir de um morfismo qualquer em Hom(C, A), multiplicando o morfismo do domínio Hom(C, A) por f, pela esquerda:

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}(C,f)\colon \mathsf{Hom}(C,A) &\longrightarrow \mathsf{Hom}(C,B) \\ h &\longmapsto \mathsf{Hom}(C,f)(h) = f \circ h \end{aligned}$$

Os itens (1) e (2) são a definição do funtor Hom$(C, -)$. Mas ainda precisamos verificar se, com tais definições, Hom$(C, -)$ realmente é um funtor de $\mathscr{D}$ em **Set**.

Em (1) e (2) vimos que Hom$(C, -)$ preserva domínios e codomínios. Vejamos se associa morfismo-identidade a morfismo-identidade.

(3) **Ação de Hom$(C, -)$ em morfismos-identidade:**

Consideremos um morfismo-identidade qualquer em $\mathscr{D}$, digamos $1_A\colon A \to A$. Temos:

$$\mathsf{Hom}(C,-)(1_A\colon A \to A) = \mathsf{Hom}(C,1_A)\colon \mathsf{Hom}(C,A) \longrightarrow \mathsf{Hom}(C,A)$$

O morfismo-identidade de A é transformado por Hom$(C, -)$ na função Hom$(C, 1_A)$, definida por:

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}(C,1_A)\colon \mathsf{Hom}(C,A) &\longrightarrow \mathsf{Hom}(C,A) \\ h &\longmapsto \mathsf{Hom}(C,1_A)(h) = 1_A \circ h = h \end{aligned}$$

Ou seja, para todo $h \in$ Hom(C, A), Hom$(C, 1_A)(h) = 1_A \circ h = h$, isto é,

$$\mathsf{Hom}(C,1_A) = 1_{\mathsf{Hom}(C,A)}$$

Noutras palavras, o funtor-hom associa o morfismo-identidade do objeto A ao morfismo-identidade do objeto A-interpretado: o conjunto Hom(C, A).

(4) **Hom**$(C, -)$ **preserva a composição de morfismos?**

Consideremos uma composição qualquer de morfismos em $\mathscr{D}$, por exemplo, a composição de $f : A \to B$ e $g : B \to D$, isto é, o morfismo $g \circ f : A \to D$. Temos:

$$\mathsf{Hom}(C, -)(g \circ f \colon A \to D) = \mathsf{Hom}(C, g \circ f) \colon \mathsf{Hom}(C, A) \longrightarrow \mathsf{Hom}(C, D)$$

E para todo morfismo h de $\mathsf{Hom}(C, A)$,

$$\mathsf{Hom}(C, g \circ f)(h) = (g \circ f) \circ h \quad (*)$$

Como vemos, $\mathsf{Hom}(C, g \circ f) \colon \mathsf{Hom}(C, A) \longrightarrow \mathsf{Hom}(C, D)$ "multiplica" os morfismos $h : C \to A$ do domínio $\mathsf{Hom}(C, A)$ pela constante $g \circ f : A \to D$, conforme o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "(g\circ f)\circ h"] & \\ A \arrow[r, "g\circ f"'] & D \end{tikzcd}$$

Por outro lado, consideremos agora a seguinte composição em **Set**:

$$\mathsf{Hom}(C, g) \circ \mathsf{Hom}(C, f) \colon \mathsf{Hom}(C, A) \longrightarrow \mathsf{Hom}(C, D)$$

Para todo morfismo $h : C \to A$ do domínio $\mathsf{Hom}(C, A)$, temos:

$$\begin{aligned} [\mathsf{Hom}(C, g) \circ \mathsf{Hom}(C, f)](h) &= \mathsf{Hom}(C, g)[\mathsf{Hom}(C, f)(h)] \\ &= \mathsf{Hom}(C, g)(f \circ h) \\ &= g \circ (f \circ h) \quad (**) \end{aligned}$$

Como a composição de morfismos em $\mathscr{D}$ (em qualquer categoria) é associativa, $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$. Logo, por $(*)$ e $(**)$, concluímos que

$$\mathsf{Hom}(C, g \circ f) = \mathsf{Hom}(C, g) \circ \mathsf{Hom}(C, f)$$

Conclusão: de fato, $\mathsf{Hom}(C, -)$ é um funtor entre $\mathscr{D}$ e **Set**, isto é, é um funtor "com valores" ou "com imagem" na categoria dos conjuntos.

Dado um diagrama comutativo qualquer em $\mathscr{D}$, por exemplo

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ B \arrow[rr, "g"'] & & D \end{tikzcd}$$

vejamos o aspecto que ele adquire, em **Set**, depois de ser transformado pelo funtor $\mathsf{Hom}(C, -)$:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Hom}(C,A) \arrow[dl, "\text{Hom}(C,f)"'] \arrow[dr, "\text{Hom}(C,g\circ f)"] & \\
\text{Hom}(C,B) \arrow[rr, "\text{Hom}(C,g)"'] & & \text{Hom}(C,D)
\end{tikzcd}$$

o traço em Hom$(C,-)$ é substituído sistematicamente pelos termos no diagrama de $\mathscr{D}$, respeitando o sentido das flechas, como se Hom$(C,-)$ fosse uma peça de plástico vazada, uma espécie de gabarito, que encaixamos em outras peças apropriadas.

Definição 6.1. *Um funtor que transporta diagramas da categoria domínio para a categoria codomínio sem alterar o sentido das flechas, chama-se **funtor covariante**. Em termos de equações, um funtor F é dito covariante quando $F(f\circ g) = F(f)\circ F(g)$ (mantém a ordem da composição).*

6.3.2 O funtor-hom contravariante

Como você deve estar imaginando, existem funtores-hom em que o traço fica do lado esquerdo, e não do lado direito! (Acertou na mosca!)

Vamos definir agora o *funtor-hom contravariante* (se o covariante é o que preserva o sentido das flechas ou a ordem da composição, o contravariante provavelmente altera a ordem da composição, inverte o sentido das flechas, de acordo?).

Faremos apenas a definição, e deixaremos a verificação das propriedades para você, como exercício.

Consideremos $\mathscr{D}$ uma categoria qualquer (pequena ou grande). Vamos construir agora um funtor-hom contravariante entre $\mathscr{D}$ e **Set**.

O contravariante também precisa estar vinculado a um objeto. Seja C um objeto em $\mathscr{D}$. Para este objeto C, definimos o funtor-hom contravariante Hom$(-,C)$ da seguinte maneira:

(1) **Ação do funtor Hom$(-,C)$ em objetos de $\mathscr{D}$:**

Para cada objeto A da categoria $\mathscr{D}$, Hom$(-,C)(A) =$ Hom(A,C),

do mesmo modo que antes, cada objeto em $\mathscr{D}$ é transformado em um conjunto-hom. Mas, agora, nosso objeto C é o codomínio dos conjuntos-hom.

(2) **Ação do funtor Hom$(-,C)$ em morfismos de $\mathscr{D}$:**

Aqui vem a parte delicada. O contravariante inverte as flechas! É preciso ter cuidado!

Para todo morfismo $f\colon A\to B$ de $\mathscr{D}$,

$$\text{Hom}(-,C)(f\colon A\to B) = \text{Hom}(f,C)\colon \text{Hom}(B,C) \longrightarrow \text{Hom}(A,C)$$

Observe que, como sempre, o símbolo que dá nome ao funtor se distribui no interior do argumento, termo a termo, e a posição marcada pelo traço é ocupada, sucessivamente, por f, A e B, dando origem a uma função-hom. Ou seja, cada morfismo f de $\mathscr{D}$ é transformado pelo funtor Hom$(-, C)$ em uma função-hom.

Mas atenção! A ordem foi alterada! Veja o que está acontecendo em termos de diagramas: o morfismo abaixo, em $\mathscr{D}$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd}$$

é transformado no seguinte morfismo (função-hom) em **Set**

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(A, C) \\ \mathrm{Hom}(B, C) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(f, C)"'] \end{tikzcd}$$

(flecha invertida). Usando a mesma analogia do caso anterior, ainda temos uma peça plástica vazada, Hom$(-, C)$ que acoplamos sobre outras peças apropriadas. Mas, neste caso, as flechas mudam de sentido depois do acoplamento.

Caso você não goste muito de flechas de baixo para cima, pode desenhar o diagrama assim:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(B, C) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(f, C)"'] \\ \mathrm{Hom}(A, C) \end{tikzcd}$$

E quanto ao trabalho dessa função Hom(f, C)? Depois que aplicamos o funtor Hom$(-, C)$ num morfismo, tomando o cuidado de inverter o sentido da flecha, o resto do trabalho é automático. A função Hom(f, C) fabrica um morfismo em Hom(A, C), a partir de um morfismo qualquer em Hom(B, C), multiplicando o morfismo do domínio Hom(B, C) por f, pela *direita*:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(f, C) \colon \mathrm{Hom}(B,C) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(A, C) \\ h &\longmapsto \mathrm{Hom}(f, C)(h) = h \circ f \end{aligned}$$

Vejamos o que acontece com a composição. Considere a seguinte composição em $\mathscr{D}$:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} D$$

Quando aplicamos o funtor contravariante Hom$(-, C)$ neste diagrama, repare que após encaixar a peça Hom$(-, C)$ termo a termo, as flechas mudam de sentido:

$$\mathrm{Hom}(A,C) \xleftarrow{\mathrm{Hom}(f,C)} \mathrm{Hom}(B,C) \xleftarrow{\mathrm{Hom}(g,C)} \mathrm{Hom}(D,C)$$

Vamos inverter o diagrama, porque é esquisito ler da direita para a esquerda. Temos:

$$\mathrm{Hom}(D,C) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(g,C)} \mathrm{Hom}(B,C) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,C)} \mathrm{Hom}(A,C)$$

Pronto! A composição acima é uma composição em **Set**. O primeiro diagrama, mostrando a composição $g \circ f$ em $\mathscr{D}$ transforma-se neste último, sugerindo-nos que

$$\mathrm{Hom}(-,C)(g \circ f) = \mathrm{Hom}(f,C) \circ \mathrm{Hom}(g,C)$$

ou seja, $\mathrm{Hom}(-,C)$ de fato inverte a ordem da composição.

6.3.3 Exercícios

1. Termine a verificação de que o funtor-hom contravariante $\mathrm{Hom}(-,C)\colon \mathscr{D} \longrightarrow$ **Set** acima definido realmente é um funtor, isto é:

(a) Calcule $\mathrm{Hom}(-,C)$ em um morfismo-identidade qualquer de $\mathscr{D}$ e verifique se o resultado é o morfismo-identidade do conjunto-hom correspondente.

(b) Prove que $\mathrm{Hom}(-,C)$ preserva a composição (apesar de trocar a ordem, ou o sentido das flechas). Em outras palavras, mostre que

$$\mathrm{Hom}(-,C)(g \circ f) = \mathrm{Hom}(f,C) \circ \mathrm{Hom}(g,C)$$

(Dica: a equação acima é uma igualdade entre duas funções de conjuntos. Para mostrar que duas funções são iguais, devemos verificar se elas possuem o mesmo domínio e o mesmo codomínio e se elas assumem os mesmos valores em cada elemento do domínio comum.)

6.4 MAIS SOBRE FUNTORES CONTRAVARIANTES

Considere $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5\}$ e a função $f\colon A \to B$ definida por

$$f(1) = 4$$
$$f(2) = 4$$
$$f(3) = 5$$

Para nos referir ao conjunto de valores no domínio de f cuja imagem é um elemento do conjunto $\{4\}$, poderíamos dizer: "$\{1,2\}$ é o conjunto de valores no domínio de f cuja imagem é um elemento de $\{4\}$". Mas esta é uma frase muito comprida. É preferível dar um nome a este conjunto e usar um símbolo para representá-lo, assim economizaremos palavras sempre que precisarmos nos referir a ele.

O conjunto de valores no domínio de f cuja imagem é um elemento do conjunto $\{4\}$ é chamado de *imagem-inversa* de $\{4\}$, e denotado $f^{-1}(\{4\})$, ou seja, $\{1, 2\} = f^{-1}(\{4\})$. Observe: $f^{-1}(\{4\})$ representa um conjunto, e não um elemento de A. (A função f nem tem inversa, porque não é injetora. Mas se tivesse, mesmo assim poderíamos falar da imagem-inversa de um conjunto $\{y\}$ qualquer em que y seria um elemento no contradomínio de f.)

Analogamente, a imagem-inversa do unitário $\{5\}$, $f^{-1}(\{5\})$, corresponde ao conjunto $\{3\}$, pois 3 é o único elemento do domínio de f cuja imagem é um elemento de $\{5\}$, ou seja, $f^{-1}(\{5\}) = \{3\}$.

Qual seria a imagem-inversa do próprio B? $f^{-1}(B)$? O próprio A, naturalmente, pois o conjunto de valores de A que é associado por f ao conjunto de valores $\{4, 5\} = B$ é o domínio da função f, o próprio A (todo elemento do domínio deve possuir imagem em B).

Então, parece existir uma "função imagem-inversa" $f^{-1}(Y)$, em que Y é um subconjunto de B, com valores X, em que X é um subconjunto de A.

De fato, essa função existe. Ela é definida no *conjunto das partes* de B, ou *conjunto potência* de B, que é o conjunto de todos os subconjuntos de B, denotado por $\mathscr{P}(B)$:

$$\mathscr{P}(B) = \{\,\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{4, 5\}\}$$

e seus valores estão no conjunto das partes de A:

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(A) = \{\,&\emptyset,\\ &\{1\}, \{2\}, \{3\},\\ &\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\},\\ &\{1, 2, 3\}\}\end{aligned}$$

Portanto, a função imagem-inversa é definida por

$$\begin{aligned}f^{-1} : \mathscr{P}(B) &\longrightarrow \mathscr{P}(A)\\ Y &\longmapsto X\end{aligned}$$

em que $X = \{x \in A \,|\, f(x) \in Y\}$.

Agora, uma observação: as funções imagem-inversa comportam-se como as funções inversas comuns no seguinte aspecto: a imagem-inversa de uma composição é a composição das imagens-inversas, mas na ordem trocada:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Com essas definições, finalmente chegamos onde queríamos: conjunto das partes e imagem-inversa são ingredientes de um funtor contravariante, chamado de **funtor conjunto das partes contravariante**.

Esse funtor é definido em **Set** e tem imagem em **Set**, isto é, $\mathscr{P}\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$, e funciona da seguinte maneira:

Para cada função de conjuntos $f\colon A \to B$, temos:

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(f\colon A \to B) &= \mathscr{P}(f)\colon \mathscr{P}(B) \longrightarrow \mathscr{P}(A)\\ &= f^{-1}\colon \mathscr{P}(B) \longrightarrow \mathscr{P}(A)\end{aligned}$$

6.4.1 Exercício

1. Verifique que com as definições dadas acima, $\mathscr{P}\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ é de fato um funtor contravariante.

(Falta apenas verificar se $\mathscr{P}$ preserva identidades e a composição. No último caso, é preciso demonstrar a igualdade $\mathscr{P}(f \circ g) = \mathscr{P}(g) \circ \mathscr{P}(f)$. Note que a ordem da composição é invertida, pois $\mathscr{P}$ é contravariante.)

6.5 NOTAÇÃO PARA FUNTORES CONTRAVARIANTES

O funtor conjunto das partes contravariante é muito importante em outras áreas da Teoria de Categorias, mas aqui ele está servindo apenas como um exemplo de funtor contravariante "real", isto é, que não pareça uma construção puramente formal e arbitrária, como fizemos com a aparição de Hom$(-, C)$ a partir de Hom$(C, -)$, que justificamos dizendo que havíamos apenas trocado a posição do traço.

A maioria das pessoas prefere não dizer "covariante" e "contravariante" o tempo todo. De maneira geral, os matemáticos têm preguiça de escrever frases longas e, sempre que possível, criam símbolos para substituir a descrição que fariam com palavras. Para evitar o emprego repetitivo das palavras covariante e contravariante, houve certa vez uma reunião de especialistas da área onde um deles, após muita discussão, proclamou a seguinte convenção:

— Todos os funtores serão considerados, de agora em diante, covariantes! Assim, não precisaremos especificar de que tipo de funtor estaremos falando! Funtor é funtor, e pronto! Com isso, promovemos a desaparição de duas palavras, o que é um ótimo resultado, considerando nosso programa geral de eliminação de palavras...

Um cético interrompeu o discurso:

— Sim, mas e o problema com o sentido das flechas, no caso dos contravariantes? O que faremos?

— Bem... Neste caso, trocaremos o sentido de todas as flechas previamente, e aplicaremos o funtor sobre as flechas já invertidas, como se o funtor fosse covariante!

— Entendi, mas como avisaremos as pessoas que trocamos o sentido das flechas?

— Simples: basta usar um símbolo. Onde há a necessidade de explicações, o melhor a fazer é não explicar nada e colocar símbolos, assim, evitamos a aparição de novas palavras!

O símbolo empregado com este fim, para avisar ao leitor que todas as flechas tiveram o sentido invertido, é símbolo "op", abreviatura de "oposta", que é abreviatura de "categoria oposta".

Nosso funtor conjunto das partes contravariante $\mathscr{P}\colon \textbf{Set} \longrightarrow \textbf{Set}$ quando aplicado sobre um morfismo qualquer

$$A \xrightarrow{f} B$$

retorna

$$\mathscr{P}(A) \xleftarrow{\mathscr{P}(f)} \mathscr{P}(B)$$

Observe que ele se encaixa termo a termo, mas inverte o sentido da flecha. Como não gostamos de ler da direita para a esquerda, refletimos o diagrama, obtendo:

$$\mathscr{P}(B) \xrightarrow{\mathscr{P}(f)} \mathscr{P}(A)$$

Esta é a ação típica de um funtor contravariante. E como funciona a convenção que elimina a palavra contravariante? Imaginamos que existe uma "categoria oposta" à categoria dos conjuntos, em que o domínio e o contradomínio de cada função trocam de posição, o que equivale a inverter o sentido da flecha no diagrama que representa a função. Trocar domínio por codomínio é aqui um processo puramente formal, artificial, que não tem significado, não produz uma nova função (em geral, produz coisas sem sentido).[6]

Assim, depois que imaginamos que todas as funções tiveram suas flechas invertidas, migramos para a categoria oposta, e avisamos as pessoas que estamos no "mundo invertido", usando nosso novo símbolo: $\textbf{Set}^{\mathrm{op}}$!

Na prática, funciona assim: dada uma função $f\colon A \to B$ em **Set**, consideramos $f\colon B \to A$ em $\textbf{Set}^{\mathrm{op}}$ e definimos o funtor conjunto das partes $\mathscr{P}\colon \textbf{Set}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \textbf{Set}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(f\colon B \to A) &= \mathscr{P}(f)\colon \mathscr{P}(B) \longrightarrow \mathscr{P}(A)\\ &= f^{-1}\colon \mathscr{P}(B) \longrightarrow \mathscr{P}(A)\end{aligned}$$

6 Por exemplo, considera-se que entre o vazio $\emptyset$ e qualquer conjunto X existe uma única função $\emptyset \to X$. Essa é a função que "não faz nada", porque não havendo elementos em $\emptyset$, não há tarefa alguma a cumprir. Entretanto, invertendo a flecha, obtemos $X \to \emptyset$, e isto, em geral, não é uma função, pois se houver ao menos um elemento em X, ele *deve* ser associado a algum elemento em $\emptyset$, o que é impossível, uma tarefa que não pode ser cumprida.

e aqui não houve necessidade de se preocupar com inversão de flechas (porque já havíamos invertido tudo antes).

Observe novamente que, neste caso, o emprego da noção de categoria oposta é meramente um recurso de notação, porque a categoria oposta, aqui, não tem significado. É diferente da construção que fizemos no capítulo 2, quando construímos as categorias determinadas por $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$ e por $\langle \mathscr{P}(A), \supseteq \rangle$. Em tal caso, havia um sentido matemático no processo de inverter todas as flechas, correspondente à *oposição* ou *dualidade* entre os conceitos "contém" e "está contido".

Em resumo:

> Um funtor $F\colon \mathscr{C}^{\mathsf{op}} \to \mathscr{D}$ é também chamado de um **funtor contravariante** de $\mathscr{C}$ para $\mathscr{D}$. Como ilustrado na definição precedente [de funtor conjunto das partes], o funtor é normalmente definido em termos de morfismos de $\mathscr{C}$ em vez de morfismos de $\mathscr{C}^{\mathsf{op}}$. Categorias opostas são mais comumente usadas como um meio para que possamos falar sobre funtores contravariantes como se fossem funtores (**covariantes**) comuns: a categoria oposta, nesta situação, é uma construção puramente formal, sem significado próprio. (BARR; WELLS, 2012, p. 70, tradução nossa.)

7 CATEGORIAS DE FUNTORES

A respeito da definição de categoria, Peter Freyd diz o seguinte em seu *Abelian Categories*, de 1964:

> Se a topologia fosse publicamente definida como o estudo de famílias de conjuntos fechadas sob interseções finitas e uniões infinitas, um sério desserviço seria prestado aos estudantes que iniciam seus estudos em topologia. A correção matemática de uma tal definição não revela nada a respeito da topologia, exceto o fato de que seus axiomas básicos podem ser formulados de maneira bastante simples. Com a teoria de categorias, deparamo-nos com o mesmo problema pedagógico. Os axiomas básicos, que rapidamente somos forçados a enunciar, são muito simples.
>
> Uma descrição melhor da topologia, embora imperfeita, diz que a topologia é o estudo das funções contínuas; da mesma maneira, a teoria de categorias pode ser melhor descrita como a teoria dos funtores. Ambas as descrições são logicamente inadmissíveis como definições iniciais, mas refletem de maneira mais precisa tanto as motivações atuais quanto as motivações históricas dos dois assuntos. Não é incorreto, ao menos historicamente, dizer que categorias são aquilo de que se necessita para definir funtores, e que funtores são aquilo de que se necessita para definir transformações naturais. (FREYD, 2003, pp. 27-28, tradução nossa.)[1]

Então, a teoria de categorias é o estudo dos funtores, ou a teoria dos funtores. Quando estudamos álgebra linear pela primeira vez, o aparecimento do espaço vetorial $\mathscr{L}(V,W)$, formado por todas as transformações lineares de V em W, nos causa estranheza. As transformações lineares são os morfismos que preservam a estrutura de espaço vetorial. Servem para relacionar espaços vetoriais. De repente, surge um espaço vetorial formado pelos morfismos que relacionam estruturas de espaço vetorial! É algo estranho à primeira vista, mas rapidamente nos acostumamos.

Sendo a teoria de categorias a teoria dos funtores, na expressão de Peter Freyd, precisamos de funtores para trabalhar. Assim como Midas transformava em ouro tudo aquilo em que tocava, devemos transformar em funtores todas as criaturas matemáticas com as quais nos deparamos (tentar, pelo menos). As transformações lineares são os morfismos entre espaços vetoriais. Fabricamos um espaço vetorial com esses morfismos: $\mathscr{L}(V,W)$. De modo análogo, os funtores são morfismos entre categorias. Como desejamos transformar tudo em funtores,

---

1 Disponível em TAC Reprints:
`http://138.73.27.39/tac/reprints/index.html` (acesso em 11/06/2018.)

precisaremos de uma categoria em que nossas criaturas transformadas em funtores possam viver (não podemos deixá-las soltas por aí). Teremos assim uma *categoria de funtores!* Os objetos serão funtores e os morfismos... morfismos entre funtores!

O Teorema 1 nos mostrou uma coisa muito interessante: podemos transformar uma categoria pequena qualquer $\mathscr{C}$ em uma categoria em que os objetos são conjuntos e em que os morfismos são funções. Mas isso ainda não é um Toque de Midas, em primeiro lugar porque só funciona com categorias pequenas. Em segundo lugar, porque transforma objetos de $\mathscr{C}$ em conjuntos, e não queremos praticar teoria de conjuntos, e sim teoria de funtores, por isso precisamos transformar objetos em funtores![2]

O que corresponde a transformar em ouro, para nós, é a transformação de uma categoria qualquer $\mathscr{D}$ (pequena ou grande) num tipo especial de categoria de funtores: a categoria dos funtores com domínio $\mathscr{D}$ e imagem em **Set**, isto é, funtores do tipo $H\colon \mathscr{D} \longrightarrow$ **Set**, como os funtores-hom, que vimos no capítulo anterior. Essa categoria será representada da seguinte maneira: Funt$(\mathscr{D},$ **Set**$)$ (lê-se: *categoria dos funtores de $\mathscr{D}$ em* ***Set***). Mas para que possamos construir uma categoria de funtores, necessitamos de um ingrediente ainda desconhecido: os morfismos entre funtores, chamados de *transformações naturais*. Antes de apresentarmos uma definição formal para esses conceitos, vamos colocar a mão na massa e trabalhar com eles.

7.1 A CATEGORIA DOS ENDOMORFISMOS DE CONJUNTOS

Em **Set**, uma função que tem domínio A e contradomínio A, isto é, uma função da forma $f\colon A \to A$, é chamada de um *endomorfismo*. O prefixo "endo" significa "interno", "dentro". Assim, um endomorfismo é um "morfismo interno": relaciona o conjunto A com o próprio conjunto A. Uma categoria importantíssima para nós é a **categoria dos endomorfismos de conjuntos:** um objeto nessa categoria é um conjunto equipado com um endomorfismo. Um conjunto A equipado com um endomorfismo f pode ser representado assim $A \xrightarrow{\ f\ } A$, assim $A \overset{f}{\circlearrowleft}$ ou simplesmente assim $\langle A, f\rangle$.

Considere, por exemplo, o conjunto $A = \{1, 2\}$.

(a) Quantos endomorfismos distintos $A \circlearrowleft$ existem? Repare que isto é o mesmo que perguntar quantos elementos há em Hom(A, A).

(B) Seja $B = \{1, 2, 3\}$. Quantos endomorfismos distintos $B \circlearrowleft$ existem? Repare que isto é o mesmo que perguntar quantos elementos há em Hom(B, B).

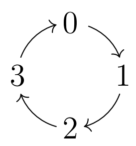
(c) Em geral, se $C = \{1, 2, 3, ..., n\}$ possui n elementos, quantos endomorfismos distintos $C \circlearrowleft$ existem? Repare (última vez) que isto é o mesmo que perguntar quantos

2 SPOILER ALERT: o funtor que transforma as coisas em ouro é o Funtor Yoneda.

elementos há em $\mathrm{Hom}(C, C)$.

Considere agora o conjunto $\mathbb{Z}_4$, dos inteiros módulo 4, equipado com o endomorfismo $f(n) = n +_4 1$, isto é, a função que soma 1 (módulo 4). Considere o conjunto $\mathbb{Z}_5^* = \{1, 2, 3, 4\}$, dos inteiros módulo 5 (sem o zero), equipado com o endomorfismo $g(n) = 2 \cdot_5 n$, a função que multiplica por 2 (módulo 5).

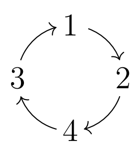
O endomorfismo f adiciona 1 (módulo 4) a cada elemento de $\mathbb{Z}_4$. O trabalho realizado por f sobre os elementos de $\mathbb{Z}_4$ pode ser representado graficamente pelo seguinte diagrama:



O diagrama acima é chamado de **diagrama interno** do endomorfismo f. Ele nos mostra exatamente o que o endomorfismo f faz:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0 +_4 1 = 1 \\
f(1) &= 1 +_4 1 = 2 \\
f(2) &= 2 +_4 1 = 3 \\
f(3) &= 3 +_4 1 = 0
\end{aligned}
$$

Por sua vez, o endomorfismo $g(n) = 2 \cdot_5 n$, definido em $\mathbb{Z}_5^*$, possui o seguinte diagrama interno:



que retrata exatamente o que o endomorfismo g faz:

$$
\begin{aligned}
g(1) &= 2 \cdot_5 1 = 2 \\
g(2) &= 2 \cdot_5 2 = 4 \\
g(4) &= 2 \cdot_5 4 = 3 \\
g(3) &= 2 \cdot_5 3 = 1
\end{aligned}
$$

Pergunta: será que existe uma função $\alpha\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$ que esteja de algum modo relacionada com os endomorfismos f e g e que possa nos fornecer informação sobre as estruturas $\langle \mathbb{Z}_4, f \rangle$ e $\langle \mathbb{Z}_5^*, g \rangle$?

Uma função α com tais características seria definida de $\mathbb{Z}_4$ para $\mathbb{Z}_5^*$, mas seria capaz de relacionar e nos fornecer informações sobre os dois endomorfismos f e g:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_4 \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z}_5^* \arrow[d, "g"] \\
\mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_5^*
\end{tikzcd}$$

"Relacionar" e "fornecer informações" a respeito de estruturas é algo que os morfismos fazem por meio da única coisa que sabem fazer: composição. Em outras palavras, uma função α com as características desejadas, *se existir*, deve ser tal que o quadrado abaixo seja comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_4 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z}_5^* \arrow[d, "g"] \\
\mathbb{Z}_4 \arrow[r, "\alpha"'] & \mathbb{Z}_5^*
\end{tikzcd}$$

Ora, dizer que o quadrado acima é comutativo significa dizer que $\alpha \circ f = g \circ \alpha$.

Mas como encontrar essa função α? Simples: olhamos para os diagramas internos de f e de g e pensamos em uma forma de acoplar o primeiro diagrama no segundo.

Observe:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dr, bend left] & \\
3 \arrow[ur, bend left] & & 1 \arrow[dl, bend left] \\
& 2 \arrow[ul, bend left] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dr, bend left] & \\
3 \arrow[ur, bend left] & & 2 \arrow[dl, bend left] \\
& 4 \arrow[ul, bend left] &
\end{tikzcd}$$

Se escolhermos um ponto no primeiro diagrama, digamos, o zero, parece óbvio que há quatro diferentes maneiras de acoplar o primeiro diagrama no segundo: um acoplamento para cada possível posição a ser ocupada pelo zero.

Por exemplo, se definirmos $\alpha(0) = 1$, o primeiro diagrama se ajusta ao segundo da maneira mais óbvia, sugerida pelo modo como foram desenhados:

$$\begin{tikzcd}
& 1 = \alpha(0) \arrow[dr, bend left] & \\
3 = \alpha(3) \arrow[ur, bend left] & & 2 = \alpha(1) \arrow[dl, bend left] \\
& 4 = \alpha(2) \arrow[ul, bend left] &
\end{tikzcd}$$

Então, obter uma função de conjuntos $\alpha\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z}_5^* \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathbb{Z}_5^* \end{array}$$

é a mesma coisa que obter um acoplamento do diagrama interno de f ao diagrama interno de g. No caso acima, obtivemos uma função $\alpha\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$, definida por:

$$\alpha(0) = 1$$
$$\alpha(1) = 2$$
$$\alpha(2) = 4$$
$$\alpha(3) = 3$$

Estará certo isso? Se tivéssemos começado com $\alpha(0) = 1$ e usado a equação que nos diz que o diagrama comuta, $\alpha \circ f = g \circ \alpha$, o que teríamos obtido? Vejamos:

Por escolha arbitrária, $\alpha(0) = 1$. Para os demais valores, temos:

$$\begin{aligned} x = 0 \rightsquigarrow (\alpha \circ f)(0) &= (g \circ \alpha)(0) \\ \alpha(f(0)) &= g(\alpha(0)) \\ \alpha(1) &= g(1) \\ \alpha(1) &= 2 \\ x = 1 \rightsquigarrow (\alpha \circ f)(1) &= (g \circ \alpha)(1) \\ \alpha(f(1)) &= g(\alpha(1)) \\ \alpha(2) &= g(2) \\ \alpha(2) &= 4 \\ x = 2 \rightsquigarrow (\alpha \circ f)(2) &= (g \circ \alpha)(2) \\ \alpha(f(2)) &= g(\alpha(2)) \\ \alpha(3) &= g(4) \\ \alpha(3) &= 3 \\ x = 3 \rightsquigarrow (\alpha \circ f)(3) &= (g \circ \alpha)(3) \\ \alpha(f(3)) &= g(\alpha(3)) \\ \alpha(0) &= g(3) \\ \alpha(0) &= 1 \end{aligned}$$

Exatamente o mesmo resultado! Os problemas são mesmo equivalentes! Traduzimos este fato dizendo que a transformação $\alpha\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$, que é completamente determinada, como vimos, pelas condições:

$$\alpha \circ f = g \circ \alpha$$
e
$$\alpha(0) = 1$$

preserva a estrutura dos endomorfismos f e g, ou ainda, "α é uma maneira de refletir a estrutura de f na estrutura de g". (LAWVERE; SCHANUEL, 2009, p. 134)[3] Repare que essa expressão, *preservar a estrutura dos endomorfismos*, faz sentido, pois, como vimos, α transforma o diagrama interno de f no diagrama interno de g, ou acopla os dois diagramas, sem romper flechas, sem pular elementos.

Agora, invertendo o raciocínio que fizemos acima, surge uma observação que nos próximos capítulos será crucial: escolhido um ponto qualquer em $\mathbb{Z}_5^*$, por exemplo, o ponto 1, **existe uma única transformação** $\alpha\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$ satisfazendo as condições:

$$\alpha \circ f = g \circ \alpha$$
e
$$\alpha(0) = 1$$

Sim, óbvio, foi o que acabamos de ver. Por que isto seria algo "crucial"? Pois é. No contexto atual, essa observação é mera consequência da construção e não parece ser muito relevante, mas em breve ela desempenhará um papel chave em nossa história. Façamos uma pausa para dar nome aos bois e fabricar uma nova categoria.

Definição 7.1. *Dados dois conjuntos equipados com endomorfismos,* $\langle A, f\rangle$ *e* $\langle B, g\rangle$*, uma transformação* $\alpha\colon A \to B$ *tal que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow[\alpha]{} & B \end{array}$$

isto é, uma função α *de* A *em* B *satisfazendo a condição* $\alpha \circ f = g \circ \alpha$ *é chamada de um* ***morfismo que preserva a estrutura dos endomorfismos*** f ***e*** g.
Notação: $\alpha\colon \langle A, f\rangle \longrightarrow \langle B, g\rangle$.

7.1.1 Exercícios

1. Já sabemos que uma categoria é formada por objetos, morfismos, composição de morfismos e regras de cálculo para a composição. Então, vamos construir agora **a categoria dos endomorfismos de conjuntos,** que representaremos com o símbolo: $\mathbf{Set}^{\circlearrowleft}$.

[3] Atenção: invertemos a notação adotada em *Matemática Conceitual*. Lá, os endomorfismos de conjuntos são representados com letras do alfabeto grego, ao passo que os morfismos entre eles são representados pelas letras usuais que representam funções. Fizemos exatamente o contrário aqui.

(1) Os objetos serão endomorfismos de conjuntos: $A \xrightarrow{f} A$, $A \xrightarrow{g} A$, $B \xrightarrow{h} B$, $C \xrightarrow{j} C$, ... que representaremos com a notação compacta: $\langle A, f\rangle$, $\langle A, g\rangle$, $\langle B, h\rangle$, $\langle C, j\rangle$, ...

(2) Os morfismos serão funções $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ que preservam a estrutura de endomorfismo: $\alpha\colon \langle A, f\rangle \longrightarrow \langle B, h\rangle$, $\beta\colon \langle A, g\rangle \longrightarrow \langle C, j\rangle$, $\gamma\colon \langle C, j\rangle \longrightarrow \langle A, f\rangle$, ...

(a) Dado o objeto $\langle A, f\rangle$, o que seria o seu morfismo-identidade?

(Dica: será um morfismo da forma $1_{\langle A,f\rangle}\colon \langle A, f\rangle \longrightarrow \langle A, f\rangle$. Agora, consulte a definição de morfismo nessa categoria.)

(b) Considere as transformações $\alpha\colon \langle A, f\rangle \longrightarrow \langle B, g\rangle$ e $\beta\colon \langle B, g\rangle \longrightarrow \langle C, h\rangle$. O que seria a composição $\beta \circ \alpha$?

(Dica: certamente será um morfismo da forma $\beta \circ \alpha\colon \langle A, f\rangle \longrightarrow \langle C, h\rangle$. Você vai precisar do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\beta"'] & C
\end{tikzcd}$$

Para que $\beta \circ \alpha$ preserve a estrutura dos endomorfismos $\langle A, f\rangle$ e $\langle C, h\rangle$, qual a condição sobre $\beta \circ \alpha$? Estabelecida a condição, como demonstrar que ela certamente será cumprida por $\beta \circ \alpha$?)

(c) Resta verificar as regras de cálculo para a composição: leis de identidade e associatividade. Então, prove que:

(i) Para qualquer transformação $\alpha\colon \langle A, f\rangle \longrightarrow \langle B, g\rangle$, verifica-se:

$$\alpha \circ 1_{\langle A,f\rangle} = \alpha$$

$$1_{\langle B,g\rangle} \circ \alpha = \alpha$$

(ii) Para quaisquer morfismos $\alpha\colon \langle A, f\rangle \longrightarrow \langle B, g\rangle$, $\beta\colon \langle B, g\rangle \longrightarrow \langle C, h\rangle$, $\gamma\colon \langle C, h\rangle \longrightarrow \langle D, j\rangle$, verifica-se:

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$$

Pronto! Já temos nossa nova categoria: **Set**$^{\circlearrowleft}$, a categoria dos endomorfismos de conjuntos![4]

[4] Você certamente percebeu que nas demonstrações acima algumas propriedades nós ganhamos de graça, pois **Set**$^{\circlearrowleft}$ foi construída sobre **Set**, por cima de **Set**, digamos. Quando isso acontece, dizemos que tais propriedades foram "herdadas da categoria de baixo", onde nos apoiamos para fazer a nova construção.

2. Nesta seção, para motivar a definição de morfismo em **Set**$^{\circlearrowleft}$, isto é, a ideia de um morfismo que preserva a estrutura de dois endomorfismos de conjuntos, construímos uma transformação $\alpha\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$ para a qual o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z}_5^* \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathbb{Z}_5^* \end{array}$$

Vimos que a comutatividade do diagrama acima, expressa em termos de equações por $\alpha \circ f = g \circ \alpha$, é a tradução categorial da ideia intuitiva de "preservar estrutura". Vimos também que obter o morfismo α a partir da condição dada no diagrama e de uma "condição inicial", do tipo $\alpha(0) = 1$, era a mesma coisa que obter um acoplamento do diagrama interno de f ao diagrama interno de g. Obtivemos assim uma função $\alpha\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$, definida por:

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= 1 \\ \alpha(1) &= 2 \\ \alpha(2) &= 4 \\ \alpha(3) &= 3 \end{aligned}$$

Agora, responda as seguintes questões:

(a) A função $\alpha\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$ definida acima é uma função injetora, sobrejetora, bijetora ou nenhuma-das-anteriores?

(b) Parece mais ou menos evidente que os endomorfismos f e g possuem "a mesma forma", pois seus diagramas internos ajustam-se perfeitamente um sobre o outro. Entretanto, para que possamos dizer que $\langle \mathbb{Z}_4, f\rangle$ e $\langle \mathbb{Z}_5^*, g\rangle$ são objetos isomorfos em **Set**$^{\circlearrowleft}$, necessitamos de uma definição de isomorfismo nessa categoria. **Formule a definição de isomorfismo em Set$^{\circlearrowleft}$.**

(Lembre-se: um isomorfismo é um morfismo invertível em determinada categoria.)

7.2 A CATEGORIA DOS MORFISMOS DE CONJUNTOS (SEM O PREFIXO "ENDO" AGORA!)

Endomorfismos de conjuntos são funções muito particulares: têm o mesmo domínio e o mesmo contradomínio. As funções mais gerais possíveis têm domínio e contradomínio distintos. Quando escrevemos, por exemplo, $A \xrightarrow{f} B$, em geral estamos supondo que $A \neq B$.

É possível fabricar uma **categoria dos morfismos de conjuntos,** como acabamos de fazer para o caso dos endomorfismos? Sim. E essa categoria é também muito importante para nós. Representaremos a categoria dos morfismos de conjuntos com o símbolo: $\mathbf{Set}^{\downarrow}$.

Como fabricamos categorias mesmo? Basta seguir a receita. Vejamos a lista de ingredientes:

(1) Os objetos de $\mathbf{Set}^{\downarrow}$ serão funções de conjuntos $A \xrightarrow{f} B$, $C \xrightarrow{g} D$, $E \xrightarrow{h} F$, ...

Usaremos a seguinte notação compacta: $\langle A, f, B\rangle$, $\langle C, g, D\rangle$, $\langle E, h, F\rangle$, ...

(2) Dados dois objetos $A \xrightarrow{f} B$, $C \xrightarrow{g} D$, isto é, $\langle A, f, B\rangle$, $\langle C, g, D\rangle$, um morfismo α entre eles

$$\alpha = (\alpha_A, \alpha_B)\colon \langle A, f, B\rangle \longrightarrow \langle C, g, D\rangle$$

é um par de funções (α_A, α_B) para o qual o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "\alpha_B"'] & D
\end{tikzcd}$$

Ou seja, se α é uma transformação entre $\langle A, f, B\rangle$ e $\langle C, g, D\rangle$, isto é, um morfismo em $\mathbf{Set}^{\downarrow}$, existe um par de funções (α_A, α_B) satisfazendo

$$\alpha_B \circ f = g \circ \alpha_A$$

a equação que corresponde à comutatividade do diagrama. Cada par de funções (α_A, α_B) determina uma transformação α distinta. Por isso, as componentes α_A e α_B do par (α_A, α_B) são chamadas de **componentes da transformação** α ou **componentes do morfismo** α.

Pronto. Aí estão os ingredientes fundamentais: morfismos e objetos. Falta definirmos uma noção admissível de composição de morfismos, o que seria o morfismo-identidade de cada objeto e por último verificar as regras de cálculo para a composição. É instrutivo fazer tais verificações!

7.2.1 Exercícios

1. O que seria o morfismo-identidade em $\mathbf{Set}^{\downarrow}$ associado a um objeto qualquer, por exemplo, $\langle A, f, B\rangle$? Certamente é um morfismo do tipo:

$$1_{\langle A,f,B\rangle}\colon \langle A, f, B\rangle \longrightarrow \langle A, f, B\rangle$$

mas o que ele é, exatamente? Ou, talvez, quem ele é?

2. Sejam α e β dois morfismos "componíveis" em $\mathbf{Set}^{\downarrow}$:

$$\alpha = (\alpha_A, \alpha_B)\colon \langle A, f, B\rangle \longrightarrow \langle C, g, D\rangle$$

e

$$\beta = (\beta_C, \beta_D)\colon \langle C, g, D\rangle \longrightarrow \langle E, h, F\rangle$$

O que seria a composição $\beta \circ \alpha$? Faça um diagrama similar ao usado para definir a composição em $\mathbf{Set}^{\circlearrowleft}$. É possível exprimir a composição $\beta \circ \alpha$ usando apenas a representação desses morfismos como pares ordenados?

3. Prove que as regras de cálculo para a composição funcionam em $\mathbf{Set}^{\downarrow}$:

(i) Para qualquer transformação $\alpha\colon \langle A, f, B\rangle \longrightarrow \langle C, g, D\rangle$, verifica-se:

$$\alpha \circ 1_{\langle A,f,B\rangle} = \alpha$$

e

$$1_{\langle B,g,C\rangle} \circ \alpha = \alpha$$

(ii) Para quaisquer morfismos

$$\alpha\colon \langle A, f, B\rangle \longrightarrow \langle B, g, C\rangle,$$
$$\beta\colon \langle B, g, C\rangle \longrightarrow \langle C, h, D\rangle,$$
$$\gamma\colon \langle C, h, D\rangle \longrightarrow \langle D, j, F\rangle,$$

verifica-se:

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha).$$

(Dica: faça os cálculos usando pares ordenados.)

4. Formule a definição de isomorfismo em $\mathbf{Set}^{\downarrow}$.

7.2.2 Qual a relação entre $\mathbf{Set}^{\downarrow}$ e $\mathbf{Set}^{\circlearrowleft}$?

Você certamente já se deparou com muitos "subs" ao longo de sua vida: subconjuntos, subespaços vetoriais, subgrupos, sub-isso, sub-aquilo. É claro que existe também o conceito de subcategoria! Vejamos a definição[5]:

Definição. *Uma* ***subcategoria*** $\mathscr{D}$ *de uma categoria* $\mathscr{C}$ *é uma categoria com as seguintes propriedades*[6]:

(Sub-1) *Todos os objetos de* $\mathscr{D}$ *são também objetos de* $\mathscr{C}$ *e todos os morfismos de* $\mathscr{D}$ *são também morfismos de* $\mathscr{C}$.

Em outras palavras, *os ingredientes da sub são também ingredientes da maior!* Se você não gostou dessa frase, talvez porque ela pareça demasiado informal, inadequada aos padrões da norma culta da língua portuguesa, talvez prefira esta: *quem mora na sub, mora na maior!*

(Construa suas próprias frases "inadequadas" para expressar do modo mais simples possível cada novo conceito matemático. Você não precisa torná-las públicas. Mantenha-as consigo. Em geral, este é um procedimento útil.)

(Sub-2) *O domínio e o codomínio de um morfismo qualquer em* $\mathscr{D}$ *são também o domínio e o codomínio do mesmo morfismo em* $\mathscr{C}$. *Segue-se daí que, para quaisquer objetos* A *e* B *em* $\mathscr{D}$, *vale:* $Hom_{\mathscr{D}}(A, B) \subseteq Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$.

Como poderíamos dizer isso? Considere um mamífero qualquer, por exemplo, um ornitorrinco. Quando você olha para o ornitorrinco considerando-o como um vertebrado, o coração de mamífero do ornitorrinco (domínio) e seu cérebro de mamífero (codomínio) são o seu cérebro e seu coração de vertebrado! Nenhuma mutação ocorre com o ornitorrinco quando o consideramos como vertebrado (após tê-lo escolhido para análise por ser um mamífero).

(Sub-3) *Se* A *é um objeto de* $\mathscr{D}$, *então seu morfismo-identidade* 1_A *em* $\mathscr{C}$ *é seu morfismo-identidade em* $\mathscr{D}$.

Uma possibilidade: *Não vale trocar de identidade ao mudar de Estado! Seu RG é o mesmo em qualquer parte do país em que você vive!*

(Não deu muito certo, porque uma pessoa pode ter vários RG's, um em cada Estado do país... Mas, em subcategorias, vale apenas o RG do objeto na categoria maior, como se fosse o CPF do objeto!)

[5] Estamos usando uma versão adaptada da definição que aparece em (BARR; WELLS, 2012, pp. 35-36)

[6] Vamos usar várias vezes as letras D e C agora. Para não esquecer quem é a sub, pense assim: D-*diferenciáveis*, C-contínuas; isso ajuda.

(Sub-4) *Se* $f\colon A \to B$ *e* $g\colon B \to C$ *são morfismos em* $\mathscr{D}$*, então a composição (em* $\mathscr{C}$*)* $g \circ f$ *está em* $\mathscr{D}$ *e constitui a composição de* f *e* g *em* $\mathscr{D}$*.*

Deixamos essa para você interpretar.

Agora que sabemos o que é uma subcategoria, aí vai:

7.2.2.1 Exercício

1. Prove que **Set**$^{\circlearrowleft}$ é uma subcategoria de **Set**$^{\downarrow}$.

(Dica: você precisará alterar ligeiramente a definição de um morfismo em **Set**$^{\circlearrowleft}$. Só a definição formal, não *a natureza*, *o comportamento*, de um morfismo em **Set**$^{\circlearrowleft}$.)

7.3 A CATEGORIA DOS GRAFOS ORIENTADOS

Quando estudamos o endomorfismo $f\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ definido por $f(n) = n +_4 1$, isto é, a função que soma 1 (módulo 4) aos elementos de $\mathbb{Z}_4$, vimos que era possível retratar o trabalho do endomorfismo f pelo seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr, bend left] & \\
3 \arrow[ur, bend left] & & 1 \arrow[dl, bend left] \\
 & 2 \arrow[ul, bend left] &
\end{tikzcd}$$

chamado de *diagrama interno* do enfomorfismo f. Este diagrama é um típico **grafo orientado.** Na língua inglesa, a palavra *graph* é usada indistintamente para se referir a gráficos de funções, gráficos em geral, e também para diagramas como o diagrama interno de f, desenhado acima. Então, *graph* é apenas um gráfico: uma representação... "gráfica" de alguma coisa! Em português, porém, usamos a forma adaptada *grafo* apenas para nos referir a certo tipo de diagramas.

Existem muitos tipos de grafos: grafos orientados, não-orientados, simples, não-simples, reflexivos, não-reflexivos, e por aí vai. Na verdade, existe uma *Teoria de Grafos*, um ramo relativamente novo e muito importante da matemática, empregado principalmente em Ciências da Computação. Não precisamos conhecer Teoria de Grafos para saber o básico sobre Teoria de Categorias, mas um pouco do alfabeto da Teoria de Grafos é bastante útil.

Observe os diagramas:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\bullet \arrow[rr, no head] & & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bullet \arrow[rr] & & \bullet
\end{tikzcd}$$

o da esquerda é chamado simplesmente de **grafo.** O da direita é chamado de **grafo orientado**. A razão para o termo "orientado" é óbvia: as flechas mostram um sentido de percurso, uma *orientação*. Interessam-nos apenas os grafos orientados. Mais precisamente: os *multigrafos orientados não-reflexivos*, também conhecidos como *quivers*[7]. É claro que não vamos carregar um nome tão comprido quanto esse ao longo do texto. Diremos apenas *grafos*, e você deverá estar ciente de que estamos nos referindo a *multigrafos orientados não-reflexivos*.

Em um grafo qualquer, os pontos são chamados de **vértices**. As linhas, flechas, curvas ou qualquer outra coisa que ligue os pontos são chamadas de **arestas.** Essa nomenclatura, vértice-aresta, é usada provavelmente por conta da famosa fórmula de Euler que relaciona os vértices, as arestas e as faces de um poliedro convexo: $V - A + F = 2$. Essa relação surge "naturalmente" na solução de certos problemas em Teoria de Grafos.

[7] *Quiver* é o nome em inglês para o estojo de flechas que um arqueiro carrega nas costas. Em português, esse estojo chama-se *aljava*.

Formalmente, podemos descrever um grafo como um conjunto A de arestas, um conjunto V de vértices e duas funções, chamadas *saída* e *chegada*, que relacionam as arestas com os vértices, da maneira que descreveremos a seguir. Consideremos um grafo orientado similar ao desenhado acima, porém com nomes para os vértices e nomes para as arestas:

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ y \arrow[rr, "\gamma"'] & & z \end{tikzcd}$$

Então, este grafo é formado pelo conjunto de vértices $V = \{x, y, z\}$, pelo conjunto de arestas $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ e pelas funções *saída* e *chegada*, que relacionam os dois conjuntos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, shift right, "\text{saída}"'] \arrow[d, shift left, "\text{chegada}"] \\ V \end{tikzcd}$$

O que essas funções fazem? Atribuem a uma flecha (aresta) a sua saída e a sua chegada:

$$\begin{aligned} \text{saída}(\alpha) = x\,;\ \text{chegada}(\alpha) = y \\ \text{saída}(\beta) = x\,;\ \text{chegada}(\beta) = z \\ \text{saída}(\gamma) = y\,;\ \text{chegada}(\gamma) = z \end{aligned}$$

A maioria dos autores prefere usar as iniciais das palavras em inglês para a saída e a chegada de uma flecha. Em inglês, a palavra *source* é usada para se referir à *origem*, *fonte* ou *saída* de uma flecha α. Escrevemos: $s(\alpha) = x$, $s(\beta) = x$, $s(\gamma) = y$. A palavra *target* é usada para se referir ao *alvo*, *objetivo* ou *chegada* de uma flecha. Assim, $t(\alpha) = y$, $t(\beta) = z$, $t(\gamma) = z$.

Com essa convenção, a representação do grafo torna-se mais compacta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ V \end{tikzcd}$$

7.3.1 Grafos iguais

Observe os seguintes grafos:

$$
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dr, bend left, "\alpha"] & \\
w \arrow[ur, bend left, "\delta"] & & y \arrow[dl, bend left, "\beta"] \\
 & z \arrow[ul, bend left, "\gamma"] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & w \arrow[dl, "\delta"'] & \\
x \arrow[dr, "\alpha"'] & & z \arrow[ul, "\gamma"'] \\
 & y \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

Como desenhos, é óbvio que são desenhos diferentes: um deles gira em sentido horário, o outro gira em sentido anti-horário. Um deles tem flechas curvas, o outro tem flechas retas. No entanto, apesar dessas diferenças "visuais", os dois são apenas formas distintas de representar *o mesmo* grafo! O mesmo grafo? Sim, pois acabamos de dar a definição de grafo: um conjunto de vértices, um conjunto de flechas (arestas) e duas funções, a função saída s e a função chegada t.

Para os dois desenhos acima, temos:

(i) Conjunto de flechas (arestas): $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

(ii) Conjunto de vértices: $V = \{x, y, z, w\}$

(iii) Função saída $s \colon A \to V$:

$$s(\alpha) = x$$

$$s(\beta) = y$$

$$s(\gamma) = z$$

$$s(\delta) = w$$

(iv) Função chegada $t \colon A \to V$:

$$t(\alpha) = y$$

$$t(\beta) = z$$

$$t(\gamma) = w$$

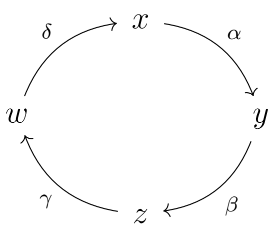
$$t(\delta) = x$$

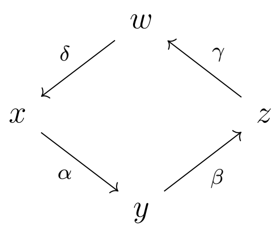
Portanto, os dois desenhos *são o mesmo grafo*, pois têm exatamente os mesmos componentes estruturais que definem um grafo. Temos, assim, uma definição de igualdade de grafos:

> **Definição 7.2.** *Dois grafos G e H são ditos* ***iguais*** *quando possuem exatamente os mesmos componentes estruturais: o mesmo conjunto de vértices, o mesmo conjunto de arestas e o mesmo par de funções saída/chegada. Notação: $G = H$.*

7.3.2 Homomorfismos de grafos

Há uma outra maneira de verificar que os desenhos





representam o mesmo grafo. Primeiro, observamos que o número de vértices e de flechas é o mesmo nos dois grafos. Depois, observamos que os vértices e as flechas têm os mesmos nomes; logo, devem representar as mesmas coisas. Finalmente, imaginamos um processo de superposição, que consiste em:

(i) Refletir o primeiro grafo em torno de um eixo imaginário, para mudar a orientação das flechas, de modo que o grafo passe a girar em sentido anti-horário;

(ii) Deformar continuamente as flechas curvas, para que se tornem retas;

(iii) Efetuar uma rotação para que os vértices chamados de x estejam sobre a mesma linha horizontal;

(iv) Deslocar o resultado assim obtido para a direita, até que coincida exatamente com o grafo da direita.

Essa sequência (de deformações contínuas[8] e movimentos rígidos de reflexão, translação e rotação) corresponde à ideia de *transformar um grafo em outro* (desenhar o primeiro sobre o segundo), mas sem destruir o primeiro, isto é, *preservando a estrutura de grafo.* Mas o que é a estrutura de grafo? A *estrutura de grafo* é dada pelo trabalho das funções *saída* e *chegada*. Uma transformação entre grafos que preserva a estrutura de grafo é, assim, uma transformação compatível com o trabalho das funções *saída* e *chegada*.

Para entender isso melhor, vamos adotar a seguinte convenção: o conjunto de arestas de um grafo G pode ser denominado $A(G)$, e seu conjunto de vértices, $V(G)$. Assim, a

[8] *Contínuas* = Não rompemos nenhuma flecha e nem arrancamos um vértice que estava na saída ou na chegada de uma flecha para colocá-lo em outra posição, na mesma flecha ou em outra.

estrutura de grafo pode ser desenhada como:

$$\begin{tikzcd} A(G) \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ V(G) \end{tikzcd}$$

No entanto, é mais comum usarmos G_1 para o conjunto de arestas e G_0 para o conjunto de vértices. A explicação para os subíndices é a seguinte: G_1 é a coleção de ingredientes de dimensão 1 do grafo (arestas); G_0 é a coleção de ingredientes de dimensão 0 do grafo (vértices). Assim, a estrutura é representada como

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ G_0 \end{tikzcd}$$

Considere agora os seguintes grafos:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, bend left, "f(0)"] & \\ 3 \arrow[ur, bend left, "f(3)"] & & 1 \arrow[dl, bend left, "f(1)"] \\ & 2 \arrow[ul, bend left, "f(2)"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr, bend left, "g(1)"] & \\ 3 \arrow[ur, bend left, "g(3)"] & & 2 \arrow[dl, bend left, "g(2)"] \\ & 4 \arrow[ul, bend left, "g(4)"] & \end{tikzcd}$$

O grafo da esquerda será chamado de F. O da direita, de G. Observe: o número de vértices e de arestas é o mesmo nos dois grafos, mas os vértices e as flechas têm rótulos diferentes; logo, devem representar coisas diferentes. De fato, o grafo F é o diagrama interno de nosso endomorfismo $f\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$, que soma 1 (módulo 4). O grafo G é o diagrama interno de nosso endomorfismo $g\colon \mathbb{Z}_5^* \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$, que multiplica por 2 (módulo 5). Agora, mesmo que não soubéssemos o significado desses diagramas, deveríamos dizer imediatamente que, embora parecidos, esses grafos *não são iguais* — porque não têm os mesmos componentes estruturais. O conjunto de flechas de F é completamente diferente do conjunto de flechas de G, e, por outro lado, $F_0 = \{0, 1, 2, 3\} \neq \{1, 2, 3, 4\} = G_0$. *Entretanto,* é possível "acoplar" o primeiro grafo sobre o segundo, como dissemos na seção sobre endomorfismos de conjuntos. Aqui, usamos uma terminologia diferente: dizemos que é possível sobrepor os dois grafos, ou desenhar o primeiro sobre o segundo, ou transformar o primeiro no segundo, preservando a estrutura de grafo.

Uma transformação α dessa natureza seria um morfismo $\alpha\colon F \longrightarrow G$, capaz de relacionar as duas estruturas:

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & G_1 \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\ F_0 & G_0 \end{tikzcd}$$

Observe que usamos s' e t' para as funções *saída* e *chegada* do grafo G, pois são diferentes das funções *saída* e *chegada* do grafo F.

Como você já deve estar imaginando, a transformação α é **um par de funções** $\alpha = (\alpha_1, \alpha_0)$ para o qual o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & G_1 \\ {\scriptstyle s}\downarrow\downarrow{\scriptstyle t} & & {\scriptstyle s'}\downarrow\downarrow{\scriptstyle t'} \\ F_0 & \xrightarrow[\alpha_0]{} & G_0 \end{array}$$

Agora, porém, a preservação da estrutura de grafo, descrita categorialmente como a comutatividade do diagrama acima, implica que as componentes α_1 e α_0 da transformação α deverão satisfazer *duas condições*:

$$\alpha_0 \circ s = s' \circ \alpha_1$$

e

$$\alpha_0 \circ t = t' \circ \alpha_1$$

Obtemos assim a seguinte

Definição 7.3. *Dados os grafos F e G, um* ***homomorfismo de grafos*** $\alpha\colon F \longrightarrow G$ *é um par de funções (α_1, α_0) para o qual o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & G_1 \\ {\scriptstyle s}\downarrow\downarrow{\scriptstyle t} & & {\scriptstyle s'}\downarrow\downarrow{\scriptstyle t'} \\ F_0 & \xrightarrow[\alpha_0]{} & G_0 \end{array}$$

Em outras palavras, α_1 e α_0 devem satisfazer as seguintes condições:

$$\alpha_0 \circ s = s' \circ \alpha_1$$

e

$$\alpha_0 \circ t = t' \circ \alpha_1$$

Entendido... Mas como isso funciona na prática? Vejamos novamente o caso dos diagramas internos de nossos endomorfismos f e g:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dr, bend left, "f(0)"] & \\
3 \arrow[ur, bend left, "f(3)"] & & 1 \arrow[dl, bend left, "f(1)"] \\
& 2 \arrow[ul, bend left, "f(2)"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dr, bend left, "g(1)"] & \\
3 \arrow[ur, bend left, "g(3)"] & & 2 \arrow[dl, bend left, "g(2)"] \\
& 4 \arrow[ul, bend left, "g(4)"] &
\end{tikzcd}$$

Quando olhamos para esses diagramas como grafos, o modo como são desenhados e o significado dos vértices ou das flechas —e, consequentemente, de seus rótulos— não são relevantes. Olhar para esses diagramas como grafos consiste em *fazer abstração de seu significado* (esquecer momentaneamente o fato de que representam objetos na categoria dos endomorfismos de conjuntos). Sendo assim, vamos trocar, por conveniência, alguns dos nomes das flechas e vértices. Os dois diagramas acima, vistos como grafos, podem ser redesenhados como:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dr, bend left, "a"] & \\
3 \arrow[ur, bend left, "d"] & & 1 \arrow[dl, bend left, "b"] \\
& 2 \arrow[ul, bend left, "c"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& x \arrow[dr, bend left, "k"] & \\
w \arrow[ur, bend left, "n"] & & y \arrow[dl, bend left, "l"] \\
& z \arrow[ul, bend left, "m"] &
\end{tikzcd}$$

Como anteriormente, o grafo da esquerda chama-se F; o da direita, G. Queremos construir um homomorfismo de grafos $\alpha\colon F \longrightarrow G$. Este homomorfismo é um par de funções (α_1, α_0) que verifica as equações:

$$\alpha_0 \circ s = s' \circ \alpha_1$$

e

$$\alpha_0 \circ t = t' \circ \alpha_1$$

Olhando para os dois grafos, parece óbvio que existem quatro maneiras de acoplar o primeiro sobre o segundo, ou desenhar o primeiro sobre o segundo, ou transformar o primeiro no segundo: uma para cada posição distinta a ser ocupada pelo zero.

Observe, entretanto, que as equações acima (da definição de homomorfismo de grafos) são igualdades entre funções, igualdades que correspondem à comutatividade do diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & G_1 \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\
F_0 \arrow[r, "\alpha_0"'] & G_0
\end{tikzcd}$$

e este diagrama nos mostra que as quatro funções envolvidas nas equações estão, todas elas, *definidas em* F_1. Em outras palavras, para testar as igualdades, deveremos trabalhar com as flechas, não com os vértices.[9] Assim, em vez de pensar em termos de encaixar um vértice sobre outro, devemos pensar em termos de encaixar uma flecha sobre a outra.

Então, haverá quatro formas distintas de sobrepor o primeiro grafo sobre o segundo: uma para cada posição a ser ocupada pela flecha a, por exemplo.

Escolhamos uma dessas possibilidades, digamos, $\alpha_1(a) = k$. Essa escolha é suficiente para determinar um homomorfismo de grafos α entre F e G.[10] Vejamos como:

Usando a primeira equação, $\alpha_0 \circ s = s' \circ \alpha_1$, e fazendo uma variável φ percorrer a coleção F_1 de flechas de F, obtemos:

$$\begin{aligned} \varphi = a \rightsquigarrow [\alpha_0 \circ s](a) &= [s' \circ \alpha_1](a) \\ \alpha_0[s(a)] &= s'[\alpha_1(a)] \\ \alpha_0(0) &= s'(k) \quad \text{(pela condição inicial)} \\ \alpha_0(0) &= x \end{aligned}$$

descobrimos assim que o vértice 0 de F deve, necessariamente, ser levado ao vértice x de G.[11]

Agora, em vez de prosseguir e analisar o que acontece com a flecha b, devemos ainda verificar o que acontece com a chegada $t(a)$ da flecha a, usando a segunda equação, que relaciona t e t' (do contrário, o algoritmo que estamos seguindo chegaria a um beco sem saída):

$$\begin{aligned} \varphi = a \rightsquigarrow [\alpha_0 \circ t](a) &= [t' \circ \alpha_1](a) \\ \alpha_0[t(a)] &= t'[\alpha_1(a)] \\ \alpha_0(1) &= t'(k) \\ \alpha_0(1) &= y \end{aligned}$$

e assim descobrimos que o vértice 1 de F deve ser levado ao vértice y de G.

[9] Isto nos diz, a propósito, que as flechas são mais importantes do que os vértices!

[10] O algoritmo que seguiremos para obter o homomorfismo só funciona porque esses grafos são muito particulares: de cada vértice parte uma única flecha e não há laços (loops) associados aos vértices. Alguns autores chamam grafos com tais características de *grafos simples*. Ou seja, para grafos não-simples uma condição inicial do tipo $\alpha_1(a) = k$ pode não determinar um único homomorfismo. No CTCS, a definição para *grafo simples* é ligeiramente diferente da definição encontrada na literatura-padrão sobre Teoria de Grafos: um grafo simples é um grafo sem arestas múltiplas e com *no máximo um* loop por vértice. Cf. (BARR; WELLS, 2012, p. 10)

[11] Já sabíamos que isso ocorreria, mas estamos vendo agora como a transformação α, ao relacionar o trabalho das funções *saída* e *chegada* de ambos os grafos, consegue produzir este resultado, que nossa intuição geométrica apenas sugeria ser possível.

Voltamos nossa atenção agora para a flecha b, usando a equação que relaciona as saídas:

$$\begin{aligned}\varphi = b \rightsquigarrow [\alpha_0 \circ s](b) &= [s' \circ \alpha_1](b)\\ \alpha_0[s(b)] &= s'[\alpha_1(b)]\\ \alpha_0(1) &= s'[\alpha_1(b)]\\ y &= s'[\alpha_1(b)] \implies \alpha_1(b) = l\end{aligned}$$

Observe que na passagem da penúltima igualdade para a última usamos a informação $\alpha_0(1) = y$, obtida no passo anterior. Isto será feito sistematicamente e sem comentários daqui pra frente. Observe ainda que se $s'[\alpha_1(b)] = y$, então, necessariamente, $\alpha_1(b) = l$, pois a flecha l é a única flecha de G cuja saída s' é y.

Prossigamos, ainda analisando a flecha b, mas usando agora a equação que relaciona t e t':

$$\begin{aligned}\varphi = b \rightsquigarrow [\alpha_0 \circ t](b) &= [t' \circ \alpha_1](b)\\ \alpha_0[t(b)] &= t'[\alpha_1(b)]\\ \alpha_0(2) &= t'(l)\\ \alpha_0(2) &= z\end{aligned}$$

mais um dado novo: o vértice 2 é transformado no vértice z.

Já sabemos tudo o que a transformação α faz com as flechas a e b. Vejamos o que acontece com a flecha c.

$$\begin{aligned}\varphi = c \rightsquigarrow [\alpha_0 \circ s](c) &= [s' \circ \alpha_1](c)\\ \alpha_0[s(c)] &= s'[\alpha_1(c)]\\ \alpha_0(2) &= s'[\alpha_1(c)]\\ z &= s'[\alpha_1(c)] \implies \alpha_1(c) = m\end{aligned}$$

Como anteriormente, se $s'[\alpha_1(c)] = z$, então, $\alpha_1(c) = m$, porque m é a única flecha em G cuja saída s' é z.

Prosseguindo:

$$\begin{aligned}\varphi = c \rightsquigarrow [\alpha_0 \circ t](c) &= [t' \circ \alpha_1](c)\\ \alpha_0[t(c)] &= t'[\alpha_1(c)]\\ \alpha_0(3) &= t'(m)\\ \alpha_0(3) &= w\end{aligned}$$

O vértice 3 de F é levado no vértice w de G. Com isso, sabemos tudo o que α faz com a flecha c.

Chegamos na última flecha. Vejamos o que α faz com a flecha d:

$$\begin{aligned} \varphi = d \rightsquigarrow [\alpha_0 \circ s](d) &= [s' \circ \alpha_1](d) \\ \alpha_0[s(d)] &= s'[\alpha_1(d)] \\ \alpha_0(3) &= s'[\alpha_1(d)] \\ w &= s'[\alpha_1(d)] \implies \alpha_1(d) = n \end{aligned}$$

porque n é a única flecha em G cuja saída s' é w.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \varphi = d \rightsquigarrow [\alpha_0 \circ t](d) &= [t' \circ \alpha_1](d) \\ \alpha_0[t(d)] &= t'[\alpha_1(d)] \\ \alpha_0(0) &= t'(n) \\ \alpha_0(0) &= x \end{aligned}$$

o último dado que faltava: o vértice 0 é levado em x.

Pronto! Nossa transformação α está completamente determinada. A componente α_1, que atua nas flechas, $\alpha_1 \colon F_1 \longrightarrow G_1$, é dada por:

$$\begin{aligned} \alpha_1(a) &= k \\ \alpha_1(b) &= l \\ \alpha_1(c) &= m \\ \alpha_1(d) &= k \end{aligned}$$

A componente α_0, que atua nos vértices, $\alpha_0 \colon F_0 \longrightarrow G_0$, é dada por:

$$\begin{aligned} \alpha_0(0) &= x \\ \alpha_0(1) &= y \\ \alpha_0(2) &= z \\ \alpha_0(3) &= w \end{aligned}$$

Agora que já sabemos o que é um grafo e sabemos o que são morfismos que preservam a estrutura de grafo, podemos construir **a categoria dos grafos!** Essa nova categoria será representada pelo símbolo: $\mathbf{Set}^{\downdownarrows}$.

7.3.2.1 Exercícios

1. Vamos construir agora a categoria $\mathbf{Set}^{\downdownarrows}$ dos *multigrafos orientados não-reflexivos* (que nós havíamos concordado em chamar apenas de *grafos*). Para fabricar uma categoria, necessitamos de ingredientes e da receita. Na categoria dos grafos orientados $\mathbf{Set}^{\downdownarrows}$, os objetos são grafos $G, H, K, L,$ etc., e os morfismos são homomorfismos de grafos $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ etc. Tendo os ingredientes básicos, é só seguir a receita:

(a) Dado um grafo qualquer G, o que seria o morfismo-identidade associado a esse grafo? Certamente será alguma coisa com o seguinte aspecto: $1_G\colon G \longrightarrow G$. Mas essa ainda não é a resposta. Precisamos considerar a definição de grafo, isto é, pensar na estrutura

$$\begin{array}{c} G_1 \\ s\Big\downarrow\Big\downarrow t \\ G_0 \end{array}$$

e depois encontrar um homomorfismo de grafos 1_G que relacione essa estrutura com ela mesma, nos permitindo "sobrepor o primeiro grafo sobre si mesmo":

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \qquad & G_1 \\ s\Big\downarrow\Big\downarrow t & & s\Big\downarrow\Big\downarrow t \\ G_0 & & G_0 \end{array}$$

Lembre-se: pela definição, um homomorfismo de grafos 1_G é um par de funções $1_G = (?, ?)$ para o qual duas condições devem ser satisfeitas. Assim, se 1_G é o morfismo-identidade do grafo G, quais são suas componentes? (Não vale chutar, você precisa testar as equações da comutatividade do diagrama.)

(b) Sejam $\alpha\colon G \longrightarrow H$ e $\beta\colon H \longrightarrow K$ dois homomorfismos de grafos. O que seria a composição $\beta \circ \alpha$?

(Dica: desenhe um diagrama.)

Já temos objetos, morfismos, morfismos-identidade e composição de morfismos. Faltam as regras de cálculo para a composição. Então, prove que:

(c) Para qualquer homomorfismo de grafos $\alpha\colon G \longrightarrow H$, verifica-se:

$$\alpha \circ 1_G = \alpha$$

e

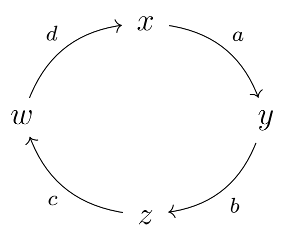
$$1_H \circ \alpha = \alpha$$

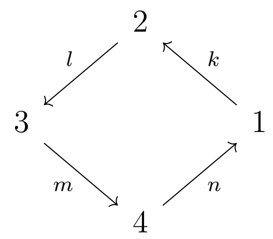
(d) Para quaisquer homomorfismos $\alpha\colon G \longrightarrow H$, $\beta\colon H \longrightarrow K$, $\gamma\colon K \longrightarrow L$, verifica-se:

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$$

(Dica: desenhe o diagrama e depois faça os cálculos usando pares ordenados.)

2. Observe os seguintes grafos:





São grafos diferentes, porque os vértices e as flechas têm nomes diferentes, isto é, se o da esquerda for chamado de G e o da esquerda de H, teremos: $H_0 \neq G_0$ e $H_1 \neq G_1$. São também desenhos diferentes, porque um é redondo e o outro é quadrado. *Entretanto,* eles têm alguma coisa em comum, a começar pelo número de flechas e de arestas: é o mesmo nos dois grafos. Ou seja, $H_0 \cong G_0$ e $H_1 \cong G_1$ (as coleções de vértices e arestas são isomorfas como conjuntos). Por outro lado, há uma sequência de transformações contínuas que nos permite deformar o primeiro grafo até que seja possível desenhá-lo sobre o segundo. Em outras palavras, existe (pelo menos) um homomorfismo de grafos $\varphi \colon G \longrightarrow H$. Responda agora:

(a) Estabelecido o homomorfismo φ entre G e H, as componentes φ_1 e φ_0 serão funções injetoras, sobrejetoras, bijetoras ou nenhuma-das-anteriores?

(b) Formule uma definição para **isomorfismo de grafos.**

(Dica: lembre-se que *isomorfismo* é um *morfismo invertível* em determinada categoria.)

3. Tente imaginar um meio de demonstrar que a categoria **Set**$^{\circlearrowleft}$ dos endomorfismos de conjuntos é uma subcategoria da categoria **Set**$^{\downdownarrows}$ dos grafos. Depois, verifique como isto é feito em *Matemática Conceitual*, Artigo III, item 6 (LAWVERE; SCHANUEL, 2009, pp. 140-141).

4. Uma categoria $\mathscr{C}$ é um grafo

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{C}_2 \arrow[r, "c"] & \mathrm{C}_1 \arrow[r, shift left=2, "s"] \arrow[r, shift right=2, "t"'] & \mathrm{C}_0 \arrow[l, "u" description]
\end{tikzcd}
$$

cujos componentes estruturais são:

(i) Uma coleção C_1 de flechas, usualmente chamadas de *morfismos*;

(ii) Uma coleção C_0 de vértices, usualmente chamados de *objetos*;

(iii) Funções saída $s \colon C_1 \to C_0$ e chegada $t \colon C_1 \to C_0$, usualmente chamadas de *função domínio* e *função codomínio*, respectivamente;

(iv) Função caminho vazio $u : C_0 \to C_1$, chamada (apenas neste texto) de *função-RG* (associa a cada objeto seu morfismo-identidade);

(v) Uma coleção C_2 de "morfismos componíveis", isto é, morfismos tais que o codomínio do primeiro seja igual ao domínio do segundo, de modo que a composição de morfismos seja possível;

(vi) Uma função composição $c\colon C_2 \to C_1$, que atribui a cada par (f, g) de morfismos componíveis, sua composição $c(f, g) = g \circ f$ em C_1.

Com os nomes usuais para as funções estruturais, o grafo pode ser redesenhado como:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}_2 \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{C}_1 \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{dom}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{cod}"'] & \mathrm{C}_0 \arrow[l, "1_{\_}" description] \end{tikzcd}$$

Sabendo que uma categoria é um tipo especial de grafo (em que existe uma noção bem definida de composição de caminhos, além de um caminho nulo associado a cada vértice), faça o seguinte:

(a) Apresente uma nova definição de funtor, sabendo que um funtor é um homomorfismo entre categorias (uma transformação que preserva a estrutura de categoria). Sendo uma categoria um grafo, um funtor deve ser um...

(b) Tente desenhar um diagrama, usando o grafo acima, para mostrar como um funtor relacionaria a estrutura de duas categorias distintas. Caso nenhuma ideia lhe ocorra, verifique a resposta em (AWODEY, 2010, pp. 21-22).

7.4 TRANSFORMAÇÕES NATURAIS

Quando estudamos os endomorfismos de conjuntos $f\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$, que adiciona 1 (módulo 4), e $g\colon \mathbb{Z}_5^* \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$, que multiplica por 2 (módulo 5), vimos que os diagramas internos desses endomorfismos podiam ser representados por:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, bend left, "f(0)"] & \\ 3 \arrow[ur, bend left, "f(3)"] & & 1 \arrow[dl, bend left, "f(1)"] \\ & 2 \arrow[ul, bend left, "f(2)"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr, bend left, "g(1)"] & \\ 3 \arrow[ur, bend left, "g(3)"] & & 2 \arrow[dl, bend left, "g(2)"] \\ & 4 \arrow[ul, bend left, "g(4)"] & \end{tikzcd}$$

Se você resolveu todos os exercícios, já sabe que *esses objetos são isomorfos em* ***Set***$^{\circlearrowleft}$*. São também isomorfos em* ***Set***$^{\downdownarrows}$, isto é, quando interpretados como grafos. Além disso, obter o isomorfismo é algo bastante simples, pois parece existir uma *equivalência natural,* ou *isomorfismo natural* entre os dois diagramas acima. Não precisamos fazer nenhum esforço, nenhuma suposição adicional, nenhum cálculo para ajustar um diagrama ao outro: eles parecem ser *naturalmente isomorfos*. Dizemos, assim, que existe uma *transformação natural* entre os dois diagramas, que, por sinal, é um *isomorfismo natural* ou uma *equivalência natural* entre eles.

Agora, uma revelação: esses diagramas internos de f e de g e a própria ideia de construir esses endomorfismos são, na realidade, funtores! São *interpretações* de dois grupos: o grupo $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle$ dos inteiros módulo 4 com a adição e o grupo $\langle \mathbb{Z}_5^*, \cdot, 1\rangle$ dos inteiros módulo 5 (sem o zero) com a multiplicação. Esses grupos são isomorfos, mas não é muito natural pensar que adição módulo 4 e multiplicação módulo 5 possam nos fornecer estruturas isomorfas... Descobrimos que eles são isomorfos porque transformamos cada um deles em um funtor, e então a equivalência natural apareceu.[12] Veremos mais tarde que se dois objetos são isomorfos quando transportados para uma categoria adequada de funtores, isto é, se existe um isomorfismo natural entre tais objetos quando transformados em funtores, um corolário de um famoso resultado nos diz que esses objetos são também isomorfos na categoria de onde eles vieram![13]

Se desconhecêssemos essa técnica de transportar problemas de uma categoria específica para uma categoria de funtores —o que chamamos de "transformar em ouro" no início desse capítulo—, o que faríamos para demonstrar que $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle$ e $\langle \mathbb{Z}_5^*, \cdot, 1\rangle$ são grupos isomorfos? Teríamos que usar apenas as ferramentas disponíveis na categoria dos grupos.

---

[12] Sabemos que esses grupos são isomorfos pelo teorema que revela a estrutura dos grupos cíclicos: todo grupo cíclico de ordem n é isomorfo a $\langle \mathbb{Z}_n, +, 0\rangle$. Mas ainda assim teríamos o problema de obter um isomorfismo específico. Este não é, evidentemente, um problema "real": não há qualquer dificuldade ou informação desconhecida aqui. É apenas um exemplo de como obter informações sobre objetos em uma categoria "de base" estudando as transformações naturais entre tais objetos vistos como funtores (em uma categoria apropriada de funtores).

[13] Você já sabe, é o Lema de Yoneda.

Um homomorfismo de grupos $\varphi\colon \langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle \longrightarrow \langle \mathbb{Z}_5^*, \cdot, 1\rangle$ é um isomorfismo quando a função subjacente $\varphi\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$ é uma função invertível, isto é, um isomorfismo na categoria dos conjuntos. Todo homomorfismo de grupos leva elemento neutro a elemento neutro; assim, obrigatoriamente, teremos: $\varphi(0) = 1$. Por outro lado, um isomorfismo de grupos leva geradores em geradores. $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle$ possui dois geradores: 1 e 3, isto é, $\langle 1\rangle = \langle 3\rangle = \langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle$. Por sua vez, $\langle \mathbb{Z}_5^*, \cdot, 1\rangle$ também possui dois geradores: 2 e 3, ou seja, $\langle 2\rangle = \langle 3\rangle = \langle \mathbb{Z}_5^*, \cdot, 1\rangle$. Em resumo, teremos dois isomorfismos, um para cada possível associação entre os geradores: $\varphi_1(1) = 2$ e $\varphi_2(1) = 3$. Os demais valores, se necessário, podem ser obtidos usando a propriedade característica de homomorfismo: $\varphi(a +_4 b) = \varphi(a) \cdot_5 \varphi(b)$.

Para o primeiro isomorfismo, φ_1, temos:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(0) &= 1 && \text{(condição necessária)}\\
\varphi_1(1) &= 2 && \text{(gerador em gerador)}\\
\varphi_1(3) &= 3 && \text{(gerador em gerador)}\\
\varphi_1(2) &= 4 && \text{(não havia outra possibilidade)}
\end{aligned}$$

Para o segundo isomorfismo, φ_2, temos:

$$\begin{aligned}
\varphi_2(0) &= 1 && \text{(condição necessária)}\\
\varphi_2(1) &= 3 && \text{(gerador em gerador)}\\
\varphi_2(3) &= 2 && \text{(gerador em gerador)}\\
\varphi_2(2) &= 4 && \text{(não havia outra possibilidade)}
\end{aligned}$$

Pronto! Vemos assim que existem dois isomorfismos de grupos entre $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle$ e $\langle \mathbb{Z}_5^*, \cdot, 1\rangle$.[14] Ora, mas é muito mais simples e divertido chegar a essa conclusão na categoria de funtores! Olhe para os dois grafos a seguir:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & \\
3 \arrow[ur] & & 1 \arrow[dl] \\
 & 2 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr] & \\
3 \arrow[ur] & & 2 \arrow[dl] \\
 & 4 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

O primeiro isomorfismo, φ_1, corresponde à sobreposição do primeiro diagrama sobre o segundo (corresponde a um isomorfismo de grafos, que por sua vez é um isomorfismo natural ou equivalência natural na categoria de funtores).

O segundo isomorfismo, φ_2, *não pode ser obtido desses grafos,* pois, para tentar uma sobreposição do primeiro sobre o segundo, que correspondesse a φ_2, teríamos que trocar o 1 e o 3 de posição no primeiro grafo, o que significaria arrancar vértices de uma flecha para colocá-los em outra. Mas esta *não é* uma transformação contínua, é um procedimento ilegal!

[14] Este é o exercício 4 da seção 2.5 do CTCS, ligeiramente adaptado. Confira! (BARR; WELLS, 2012, p. 35)

Outra maneira de verificar este fato, o de que φ_2 não pode ser obtido por uma sobreposição do primeiro grafo no segundo, é usar a definição de homomorfismo de grafos ou (mais simples ainda) a definição de morfismo na categoria dos endomorfismos de conjuntos. Pensando novamente nos endomorfismos f e g e supondo que φ é um morfismo entre $\langle \mathbb{Z}_4, f \rangle$ e $\langle \mathbb{Z}_5^*, g \rangle$, vemos que:

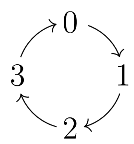
$$\begin{aligned}
\varphi \circ f &= g \circ \varphi \\
(\varphi \circ f)(0) &= (g \circ \varphi)(0) \\
\varphi[f(0)] &= g[\varphi(0)] \\
\varphi(1) &= g(1) \\
\varphi(1) &= 2
\end{aligned}$$

ou seja, $\varphi(0) = 1 \implies \varphi(1) = 2$. Isto significa que a condição inicial $\varphi(0) = 1$ *determina* o isomorfismo φ_1. Não é possível produzir $\varphi(1) = 3$, o que corresponderia a φ_2.

Portanto, e assim voltamos à questão crucial que havíamos mencionado na seção sobre endomorfismos, existe uma única transformação natural entre as duas interpretações acima correspondendo à condição inicial $\varphi(0) = 1$: aquela que associa o gerador 1 de $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle$ ao gerador 2 de $\langle \mathbb{Z}_5^*, \cdot, 1 \rangle$.

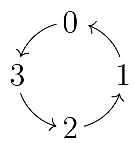
Como poderíamos obter o outro isomorfismo, φ_2? Teríamos que, primeiramente, usar outra interpretação para $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle$.

A propósito, o grafo



é chamado de *grafo orientado de Cayley*[15] associado ao subgrupo $\langle 1 \rangle$ do grupo $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle$ (que é o próprio $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle$). Cada flecha do grafo corresponde a adicionar 1 ao elemento que está na saída da flecha. A chegada da flecha é o resultado da operação. Isto é exatamente a mesma coisa que descrevemos como o trabalho do endomorfismo f.

Poderíamos ter interpretado esse grupo usando o gerador 3. O grafo correspondente ao subgrupo $\langle 3 \rangle$ (que é o próprio $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle$) é "o inverso" do grafo anterior, gira em sentido contrário:



[15] O nome original é *Cayley Digraph*. *Digraph* = *directed graph* = grafo orientado. Confira! (FRALEIGH, 2003, pp. 70-73).

pois 3 é o inverso de 1 em $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle$.[16] Repare que este último *não é* mera reflexão do anterior: são grafos isomorfos, mas distintos.

Agora, fazemos uma reflexão deste último grafo em torno do próprio eixo, com o que obtemos:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr, bend left] & \\
1 \arrow[ur, bend left] & & 3 \arrow[dl, bend left] \\
 & 2 \arrow[ul, bend left] &
\end{tikzcd}$$

e finalmente podemos compará-lo com o grafo de $\langle \mathbb{Z}_5^*, \cdot, 1\rangle$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr, bend left] & \\
1 \arrow[ur, bend left] & & 3 \arrow[dl, bend left] \\
 & 2 \arrow[ul, bend left] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, bend left] & \\
3 \arrow[ur, bend left] & & 2 \arrow[dl, bend left] \\
 & 4 \arrow[ul, bend left] &
\end{tikzcd}$$

Agora, uma sobreposição natural, correspondência natural ou equivalência natural entre os dois grafos nos dá o isomorfismo φ_2 procurado. Note, uma vez mais, que *para essa interpretação* de $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle$ *existe uma única transformação natural* (um único homomorfismo de grafos) correspondente à escolha $\varphi(0) = 1$.

Você deve estar pensando:

— *Legal, tudo isso é muito bacana... Mas ainda não entendi como um endomorfismo de conjuntos ou um grafo pode ser visto como um funtor! Também não entendi exatamente o que seria uma categoria de funtores!*

Para esclarecer essas questões, necessitamos da definição formal de transformação natural.

Definição 7.4. *Sejam F e G dois funtores entre categorias quaisquer $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, como representado abaixo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, bend left, "\mathrm{F}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{G}"'] & \mathscr{D}
\end{tikzcd}$$

[16] Observe-se, de passagem, que incrível tradução geométrica (girar no sentido inverso) para um fato algébrico (dois elementos serem o inverso um do outro em um grupo).

Uma ***transformação natural*** *$\alpha\colon F \longrightarrow G$ entre os funtores F e G, indicada por*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{F}"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{G}"'{name=D}] & \mathscr{D} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

é dada por uma família (coleção) de morfismos $\alpha_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ da categoria codomínio $\mathscr{D}$, indexada pelos objetos X da categoria domínio $\mathscr{C}$, de tal maneira que:

(TN-1) Para todo objeto A de $\mathscr{C}$, existe um $\mathscr{D}$-morfismo $\alpha_A\colon F(A) \longrightarrow G(A)$.

(TN-2) Para todo morfismo $f\colon A \to B$ de $\mathscr{C}$, o diagrama abaixo (em $\mathscr{D}$) comuta:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow[\alpha_B]{} & G(B) \end{array}$$

Dizer que o diagrama acima comuta é o mesmo que dizer que $\alpha_B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$. O fato de que o diagrama acima comuta é chamado de a ***naturalidade*** *da transformação natural α. Os morfismos α_X, como α_A e α_B acima, são chamados de* ***componentes*** *da transformação natural α.*

Tudo muito familiar! Entretanto, se tivéssemos apresentado essa definição antes de ilustrar o significado de transformação natural com exemplos diversos, provavelmente a definição teria parecido algo completamente sem sentido.

7.5 A CATEGORIA DAS INTERPRETAÇÕES DE UM LOOP

Um grafo do tipo $\bullet \circlearrowleft$ é chamado de *loop*, ou *laço*. É constituído, como mostra o desenho, por um único vértice e por uma única flecha. Existindo um único vértice e uma única flecha, a função *chegada* é obrigada a "torcer" a flecha, para que seu valor coincida com o valor da função *saída*. Vamos chamar esse grafo de T.

Queremos interpretar o grafo T, dar um significado a ele. Ora, já sabemos que interpretações são funtores. Mas não queremos uma interpretação qualquer, e sim uma interpretação na categoria de conjuntos e funções. Ou seja, precisamos de um funtor do tipo $F\colon\ \bullet \circlearrowleft\ \longrightarrow$ **Set**. O problema é que essa expressão está formalmente errada, pois um funtor é um morfismo entre categorias, e o domínio desse suposto funtor F não é uma categoria, e sim um grafo! Para resolver esse pequeno inconveniente, usamos o conceito de *categoria livre* associada ao grafo $\bullet \circlearrowleft = T$. O que seria isto? Imaginamos que existe um *funtor categoria livre*, representado por C_ℓ, e que esse funtor categoria livre transforma T em uma categoria. Assim, a categoria $C_\ell(T)$, imagem de T pelo funtor categoria livre, é uma categoria que contém um único objeto e infinitos morfismos: C_ℓ transforma o vértice único de T em um objeto único K em $C_\ell(T)$; o caminho vazio associado ao vértice é transformado no morfismo-identidade do objeto único K; e o loop de T converte-se em um endomorfismo $u\colon K \to K$ de $C_\ell(T)$. Como não há relações do tipo $u \circ u = 1_K$ ou $u \circ u = u$ limitando as composições $u \circ u$, $u \circ u \circ u$, $u \circ u \circ u \circ u$, etc., teremos infinitos morfismos u^n em $C_\ell(T)$, um para cada natural n.[17] Dizemos que o funtor categoria livre C_ℓ nos permite "interpretar o grafo T como categoria".

Agora, podemos construir uma interpretação de T em **Set**! Considere o funtor

$$F\colon C_\ell(T) \longrightarrow \textbf{Set}$$

Suponha que F transforme o objeto único K de $C_\ell(T)$ no conjunto $\mathbb{Z}_4$ e que o endomorfismo u de $C_\ell(T)$ seja transformado em nosso endomorfismo $f\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$, que adiciona 1 (módulo 4). Então, temos:

$$\begin{aligned} F(u\colon K \to K) &= F(u)\colon F(K) \longrightarrow F(K) \\ &= f\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \end{aligned}$$

Em outras palavras, todo conjunto A equipado com um endomorfismo $h\colon A \to A$ é uma interpretação em conjuntos do grafo $\bullet \circlearrowleft$, ou, mais precisamente, todo conjunto A equipado com um endomorfismo $h\colon A \to A$ é a imagem $H(u)$ em **Set** do endomorfismo $u\colon K \to K$ por meio de um funtor

$$H\colon C_\ell(T) \longrightarrow \textbf{Set}$$

Sendo assim, podemos dizer que nosso endomorfismo $g\colon \mathbb{Z}_5^* \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$, que multiplica por 2 (módulo 5), pode ser a imagem de $u\colon K \to K$ por um funtor

$$G\colon C_\ell(T) \longrightarrow \textbf{Set}$$

Temos, portanto, duas interpretações distintas do grafo T —ou do endomorfismo $u\colon K \to K$ de $C_\ell(T)$— em conjuntos:

$$\begin{tikzcd} C_\ell(T) \arrow[rr, bend left, "\mathrm{F}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{G}"'] & & \textbf{Set} \end{tikzcd}$$

[17] Convenção: $u^0 = 1_K$.

Observe: a interpretação "de cima", a imagem do funtor F em **Set**, é o nosso endomorfismo f, que soma 1 (módulo 4). A interpretação "de baixo", a imagem do funtor G em **Set**, é o nosso endomorfismo g, que multiplica por 2 (módulo 5). **Eis aqui o sentido em que um endomorfismo de conjuntos pode ser visto como um funtor!**

Vejamos agora, de maneira precisa, o que significa um morfismo entre tais funtores. Uma *transformação natural* α entre as interpretações F e G, representada como

$$\begin{tikzcd} C_\ell(T) \arrow[rr, bend left, "\mathrm{F}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{G}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \alpha"] & & \textbf{Set} \end{tikzcd}$$

de acordo com a definição, é dada por uma família de morfismos $\alpha_X \colon F(X) \longrightarrow G(X)$ em **Set**, indexada pelos objetos X de $C_\ell(T)$, satisfazendo as condições:

(TN-1) Para todo objeto A de $C_\ell(T)$, existe um morfismo $\alpha_A \colon F(A) \longrightarrow G(A)$ (em **Set**);

(TN-2) Para todo morfismo $f \colon A \to B$ de $C_\ell(T)$, o diagrama abaixo (em **Set**) comuta:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Ora, mas só existe um objeto em $C_\ell(T)$: o objeto K. E só há um tipo de morfismo em $C_\ell(T)$, as potências de u: $u^0 = 1_K \colon K \to K$, $u^1 = u \colon K \to K$, u^2, u^3, etc.

Portanto, podemos reescrever tudo de forma mais simples:

Uma *transformação natural* α entre as interpretações F e G, representada como

$$\begin{tikzcd} C_\ell(T) \arrow[rr, bend left, "\mathrm{F}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{G}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \alpha"] & & \textbf{Set} \end{tikzcd}$$

de acordo com a definição, é dada por um morfismo $\alpha_K \colon F(K) \longrightarrow G(K)$ em **Set**, indexado pelo objeto único K de $C_\ell(T)$, satisfazendo as condições:

(TN-1) Para o objeto único K de $C_\ell(T)$, existe (pelo menos) um morfismo em **Set**:

$$\alpha_K \colon F(K) = \mathbb{Z}_4 \longrightarrow G(K) = \mathbb{Z}_5^*$$

(TN-2) Para todo morfismo $h\colon K \to K$ de $C_\ell(T)$, o diagrama abaixo (em **Set**) comuta:

$$\begin{tikzcd} F(K) = \mathbb{Z}_4 \arrow[r, "\alpha_K"] \arrow[d, "F(h)"'] & G(K) = \mathbb{Z}_5^* \arrow[d, "G(h)"] \\ F(K) = \mathbb{Z}_4 \arrow[r, "\alpha_K"'] & G(K) = \mathbb{Z}_5^* \end{tikzcd}$$

Simplificando as expressões, eliminando $F(K)$ e $G(K)$, deixando apenas seus valores em **Set**, obtemos:

Uma transformação natural $\alpha\colon F \longrightarrow G$ é dada por um morfismo $\alpha_K\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$ em **Set**, indexado pelo objeto único K de $C_\ell(T)$, satisfazendo as condições:

(TN-1) Para o objeto único K de $C_\ell(T)$, existe (pelo menos) um morfismo em **Set**:

$$\alpha_K\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$$

(TN-2) Para todo morfismo $h\colon K \to K$ de $C_\ell(T)$, o diagrama abaixo (em **Set**) comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_4 \arrow[r, "\alpha_K"] \arrow[d, "F(h)"'] & \mathbb{Z}_5^* \arrow[d, "G(h)"] \\ \mathbb{Z}_4 \arrow[r, "\alpha_K"'] & \mathbb{Z}_5^* \end{tikzcd}$$

Olhando para a condição (TN-2), para a naturalidade da transformação α, vemos que h é uma variável: representa um morfismo $u^n\colon K \to K$, para algum natural n. Vejamos, então, em cada caso, o que a comutatividade do diagrama nos diz.

(1) Quando $h = u^0 = 1_K\colon K \to K$, temos:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_4 \arrow[r, "\alpha_K"] \arrow[d, "1_{\mathbb{Z}_4}"'] & \mathbb{Z}_5^* \arrow[d, "1_{\mathbb{Z}_5^*}"] \\ \mathbb{Z}_4 \arrow[r, "\alpha_K"'] & \mathbb{Z}_5^* \end{tikzcd}$$

pois $F(1_K) = 1_{F(K)} = 1_{\mathbb{Z}_4}$; mesma coisa para $G(1_K)$.

O diagrama acima comuta para qualquer função de conjuntos α_K, por conta das leis de identidade para a composição. Ou seja, o caminho vazio associado ao vértice único do grafo $\bullet \circlearrowleft$, ao ser transformado no morfismo-identidade do objeto único K de $C_\ell(T)$, não impõe qualquer restrição sobre as transformações naturais entre interpretações desse grafo em conjuntos. Em outras palavras: "um caminho vazio não leva a nada".

(2) Para $h = u^1 = u \colon K \to K$ de $C_\ell(T)$, temos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{\alpha_K} & \mathbb{Z}_5^* \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow[\alpha_K]{} & \mathbb{Z}_5^* \end{array} \tag{7.1}$$

porque $F(u) = f$ e $G(u) = g$.

(3) Para $h = u^2 = u \circ u \colon K \to K$ de $C_\ell(T)$, temos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{\alpha_K} & \mathbb{Z}_5^* \\ {\scriptstyle f\circ f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g\circ g} \\ \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow[\alpha_K]{} & \mathbb{Z}_5^* \end{array}$$

porque $F(u \circ u) = F(u) \circ F(u) = f \circ f$ e $G(u \circ u) = G(u) \circ G(u) = g \circ g$.

A partir daqui a situação torna-se irrelevante para nosso propósito atual. No final deste capítulo, veremos a importantíssima relação que os morfismos f^2, g^2, f^3, g^3, etc., mantêm com f e g. No momento, somente $f = f^1$ e $g = g^1$ nos interessam.

Então, o que o diagrama (7.1) acima nos diz é que uma transformação natural entre os funtores $F, G \colon C_\ell(T) \longrightarrow$ **Set** é exatamente a mesma coisa que um morfismo entre $\langle \mathbb{Z}_4, f \rangle$ e $\langle \mathbb{Z}_5^*, g \rangle$ na categoria $\mathbf{Set}^{\circlearrowleft}$ dos endomorfismos de conjuntos. Assim, é fácil dar uma transformação natural entre essas duas interpretações F e G: basta escolher um morfismo qualquer entre $\langle \mathbb{Z}_4, f \rangle$ e $\langle \mathbb{Z}_5^*, g \rangle$ em $\mathbf{Set}^{\circlearrowleft}$. Por exemplo, podemos escolher $\alpha_K = \varphi_1$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathbb{Z}_5^* \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow[\varphi_1]{} & \mathbb{Z}_5^* \end{array}$$

sendo a transformação natural $\varphi_1 \colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^*$ dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 1 \\ \varphi_1(1) &= 2 \\ \varphi_1(3) &= 3 \\ \varphi_1(2) &= 4 \end{aligned}$$

Agora que sabemos que todo endomorfismo de conjuntos é um funtor (uma interpretação do grafo $\bullet \circlearrowleft$ em conjuntos) e agora que sabemos o que é uma transformação natural, **podemos construir nossa primeira categoria de funtores!**

7.5.1 Exercícios

1. Vamos fabricar a categoria Funt($\bullet \circlearrowleft$,**Set**), formada por todas as interpretações do grafo terminal T em conjuntos[18]. Sendo mais precisos, a categoria Funt($C_\ell(T)$, **Set**). Para fabricar uma categoria, necessitamos, como sempre, dos ingredientes e da receita. Lá vamos nós:

(1) Os **objetos** dessa categoria serão *funtores:* $C_\ell(T) \xrightarrow{F}$ **Set**, $C_\ell(T) \xrightarrow{G}$ **Set**, $C_\ell(T) \xrightarrow{H}$ **Set**, etc.

(2) Os **morfismos** serão *transformações naturais:* $\alpha\colon F \longrightarrow G$, $\beta\colon G \longrightarrow H$, $\gamma\colon H \longrightarrow L$, etc.

(3) O que seria o **morfismo-identidade** associado a um funtor F? Tem que ser, necessariamente, uma transformação natural $1_F\colon F \longrightarrow F$. Mas o que seria isto? O desenho abaixo nos ajuda a entender:

$$\begin{tikzcd} C_\ell(T) \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{F}"] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{F}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_F"] & \textbf{Set} \end{tikzcd}$$

A definição de transformação natural nos diz que $1_F\colon F \longrightarrow F$ é dada por um morfismo 1_{F_K}, indexado pelo objeto K de $C_\ell(T)$, de tal maneira que, para todo morfismo $h\colon K \to K$, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} F(K) \arrow[r, "1_{F_K}"] \arrow[d, "F(h)"'] & F(K) \arrow[d, "F(h)"] \\ F(K) \arrow[r, "1_{F_K}"'] & F(K) \end{tikzcd}$$

Este diagrama está em **Set.** São conjuntos e funções. Então, responda:

(a) O que seria uma função 1_{F_K} tal que, para toda função $F(h)\colon F(K) \to F(K)$, teríamos

$$1_{F_K} \circ F(h) = F(h) \circ 1_{F_K}\,?$$

[18] Como vimos no capítulo 2, um *objeto terminal* é um objeto que recebe uma única flecha de cada um dos objetos da categoria em que vive. Dizer que $T = \bullet \circlearrowleft$ é um objeto terminal na categoria dos grafos significa dizer que dado um grafo qualquer G, existe um único homomorfismo de grafos $H\colon G \longrightarrow \bullet \circlearrowleft$. A rigor, qualquer grafo com um único vértice e um único loop serve como objeto terminal nessa categoria. Demonstra-se que (em qualquer categoria) se dois objetos comportam-se como objeto terminal, então são isomorfos. Assim, de maneira geral, por simplicidade, escolhemos um desses objetos e nos referimos a ele como "o objeto terminal" da categoria. Em **Set**, por exemplo, o objeto terminal é qualquer conjunto unitário, como este: $\{*\}$. Isto significa que dado um conjunto qualquer A, existe uma única função de conjuntos $f : A \longrightarrow \{*\}$.

Repare que, como só há um objeto em $C_\ell(T)$, todas as componentes de uma transformação natural 1_{F_K} são iguais. Afinal, o que é 1_{F_K}?

3. Existe mais de uma maneira de compor transformações naturais. Para nossos objetivos, porém, é suficiente conceber a composição de transformações naturais da maneira mais simples e óbvia possível. Então, consideremos duas transformações naturais $\alpha\colon F \to G$ e $\beta\colon G \to H$, representadas abaixo:

$$\begin{tikzcd} C_\ell(T) \arrow[r, bend left, "\mathrm{F}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{G}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \textbf{Set} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_\ell(T) \arrow[r, bend left, "\mathrm{G}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{H}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \textbf{Set} \end{tikzcd}$$

Esses dois diagramas podem ser representados em um só:

$$\begin{tikzcd} C_\ell(T) \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{F}"] \arrow[r, "\mathrm{G}" description] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{H}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & \textbf{Set} \end{tikzcd}$$

o que nos sugere que a composição $\beta \circ \alpha$ deve ser uma transformação natural entre F e H:

$$\begin{tikzcd} C_\ell(T) \arrow[r, bend left, "\mathrm{F}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{H}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & \textbf{Set} \end{tikzcd}$$

Vejamos como as coisas funcionam na prática. Consideremos um morfismo qualquer $k\colon K \to K$ em $C_\ell(T)$. Como α e β são, por hipótese, transformações naturais, temos a seguinte situação:

$$\begin{tikzcd} F(K) \arrow[r, "\alpha_K"] \arrow[d, "F(k)"'] & G(K) \arrow[r, "\beta_K"] \arrow[d, "G(k)"'] & H(K) \arrow[d, "H(k)"] \\ F(K) \arrow[r, "\alpha_K"'] & G(K) \arrow[r, "\beta_K"'] & H(K) \end{tikzcd}$$

Este diagrama está em **Set**: os vértices são conjuntos; as flechas, funções. Sendo α uma transformação natural entre os funtores F e G, o retângulo da esquerda comuta. Sendo

β uma transformação natural entre os funtores G e H, o retângulo da direita comuta. Com esses dados, responda:

(a) Qual condição devemos impor sobre o diagrama acima para que possamos considerar $\beta \circ \alpha$ uma transformação natural entre F e H?

(b) Estabelecida a condição, complete a sentença: $(\beta \circ \alpha)_K = ?$

4. Já temos objetos, morfismos, um morfismo-identidade para cada objeto e uma composição de morfismos. Resta apenas verificar as regras de cálculo para a composição, as leis de identidade e a associatividade. Então, prove que:

(i) Para qualquer transformação natural $\alpha \colon F \longrightarrow G$, verifica-se:

$$\alpha \circ 1_F = \alpha$$

$$1_G \circ \alpha = \alpha$$

(ii) Para quaisquer transformações naturais $\alpha \colon F \longrightarrow G$, $\beta \colon G \longrightarrow H$, $\gamma \colon H \longrightarrow L$, verifica-se:

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$$

Pronto! Construímos assim nossa primeira categoria de funtores: a categoria Funt$(C_\ell(T), \textbf{Set})$! De maneira menos precisa, porém mais sugestiva, podemos dizer que se trata da categoria Funt$(\bullet \circlearrowleft, \textbf{Set})$, formada por todas as interpretações do grafo terminal T em conjuntos.

5. Você certamente percebeu que todos os cálculos realizados nos exercícios acima reduzem-se a cálculos na categoria **Set**$^{\circlearrowleft}$, dos endomorfismos de conjuntos. De fato, começamos esta seção dizendo que uma interpretação do grafo terminal T em conjuntos (um funtor) é um endomorfismo de conjuntos, ou, olhando-o de outra maneira, um objeto de **Set**$^{\circlearrowleft}$. Da mesma forma, todas as transformações naturais na categoria Funt$(\bullet \circlearrowleft, \textbf{Set})$ reduzem-se a morfismos em **Set**$^{\circlearrowleft}$. Essas duas categorias devem ser, portanto, isomorfas. E são mesmo!

(a) Prove que a categoria Funt$(\bullet \circlearrowleft, \textbf{Set})$ é isomorfa à categoria **Set**$^{\circlearrowleft}$.[19]

Observe que estamos começando a aprender a transformar as coisas em funtores! Uma criatura muito familiar do nosso dia a dia, uma função do tipo $f \colon A \to A$ é, para nós, a partir de agora, um funtor na categoria dos funtores do grafo terminal $\bullet \circlearrowleft$ em conjuntos.[20]

[19] Compare com o Exercício 2 da seção 4.2.23 do CTCS (BARR; WELLS, 2012, p.108).

[20] Lembre-se: queremos transformar tudo em funtores, pois a teoria de categorias é a teoria dos funtores: necessitamos de funtores para trabalhar!

6. Muitos autores utilizam a *notação exponencial* B^A quando querem se referir ao conjunto de morfismos existentes entre A e B em determinada categoria. Nossa notação-padrão para esse conjunto é a notação-hom, ou seja,

$$B^A = \mathsf{Hom}(A, B)$$

Uma razão primitiva[21] para essa escolha é a seguinte: considere os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Quantas funções $A \xrightarrow{f} B$ existem? É relativamente simples demonstrar (para conjuntos finitos) que o número de funções entre A e B é dado por $|B|^{|A|}$, em que $|X|$ representa o número de elementos de X. Assim, se $|B|^{|A|}$ representa o número de funções de A em B, parece natural usarmos B^A para representar não o número, mas o conjunto de funções de A em B. No nosso exemplo, o número de funções de A em B é $3^2 = 9$.

Esse esquema de notação pode ser generalizado para representar categorias inteiras, e não apenas conjuntos-hom específicos. Em particular, os símbolos **Set**$^{\circlearrowleft}$, **Set**$^{\downarrow}$ e **Set**$^{\downdownarrows}$ são usados para sugerir o seguinte:

Set$^{\circlearrowleft}$ $\rightsquigarrow$ os objetos são interpretações do grafo terminal T em conjuntos;

Set$^{\downarrow}$ $\rightsquigarrow$ os objetos são interpretações do grafo flecha genérica $\bullet \longrightarrow \bullet$ em conjuntos;

Set$^{\downdownarrows}$ $\rightsquigarrow$ os objetos são interpretações do grafo $\bullet \rightrightarrows \bullet$ em conjuntos.

Agora que você sabe de onde essas coisas vieram, prove que:

(a) A categoria **Set**$^{\downarrow}$, dos morfismos de conjuntos, é isomorfa à categoria Funt($\bullet \longrightarrow \bullet$, **Set**), das interpretações da flecha genérica em conjuntos.

(b) A categoria **Set**$^{\downdownarrows}$ dos grafos orientados é isomorfa à categoria Funt($\bullet \rightrightarrows \bullet$, **Set**) das interpretações do grafo $\bullet \rightrightarrows \bullet$ em conjuntos.

Aumentamos consideravelmente nosso repertório de criaturas familiares que podem ser vistas como funtores! Estamos agora em condições de lidar com categorias de funtores de um ponto de vista inteiramente geral.[22]

---

[21] Existe uma razão não-primitiva: o conceito categorial de *exponenciação*, que não abordaremos.

[22] Em *Matemática Conceitual*, as categorias **Set**$^{\circlearrowleft}$, **Set**$^{\downarrow}$ e **Set**$^{\downdownarrows}$ são chamadas de *categorias de diagramas*. No CTCS, são chamadas de *categorias de modelos*.

7.6 GENERALIZANDO...

Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias quaisquer. Consideremos a categoria dos funtores de $\mathscr{C}$ em $\mathscr{D}$: Funt($\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$). Nessa categoria, os objetos são funtores F, G, H, etc., e os morfimos são transformações naturais α, β, γ, etc., entre tais funtores.

Uma transformação natural α entre F e G, por exemplo, é usualmente retratada como:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{F}"] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{G}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

o diagrama nos mostra que α relaciona os dois funtores F e G: é uma transformação entre as interpretações F e G.

Note que, agora, não sabemos o que é a categoria domínio $\mathscr{C}$. Tampouco sabemos o que é a categoria codomínio $\mathscr{D}$. Precisamos trabalhar de maneira inteiramente formal, usando apenas as definições de categoria, funtor, transformação natural. Conseguiremos fazer isso porque trabalhamos anteriormente em situações "concretas", com categorias de funtores específicas, formando assim uma base intuitiva capaz de guiar nossa imaginação.

Antes de verificar como α transforma a interpretação F na interpretação G, precisamos saber o que F e G fazem. E para que F e G possam fazer alguma coisa, devemos escolher um morfismo qualquer na categoria domínio $\mathscr{C}$. Consideremos, então, $f\colon A \to B$ um morfismo qualquer em $\mathscr{C}$. A ação dos funtores F e G em f pode ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) & G(B) \end{tikzcd}$$

os dois morfismos acima estão em $\mathscr{D}$, na categoria codomínio. Não sabemos o que os objetos ou os morfismos significam, mas, de acordo com a definição, uma transformação natural α entre F e G é dada por uma família $\alpha_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ de morfismos em $\mathscr{D}$, indexada pelos objetos X de $\mathscr{C}$, satisfazendo duas condições:

(TN-1) Para todo objeto K de $\mathscr{C}$, existe um $\mathscr{D}$-morfismo $\alpha_K\colon F(K) \longrightarrow G(K)$.

(TN-2) Para todo morfismo $f\colon A \to B$ de $\mathscr{C}$, o diagrama abaixo (em $\mathscr{D}$) comuta:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Dizer que o diagrama acima comuta é o mesmo que dizer que $\alpha_B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$. Lembrando: o fato de que o diagrama acima comuta é chamado de a **naturalidade** da transformação natural α. Os morfismos α_X, como α_A e α_B acima, são chamados de **componentes** da transformação natural α.

Agora que já somos capazes de considerar tais conceitos de um ponto de vista completamente geral, vamos definir isomorfismo na categoria Funt($\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$).

Definição 7.5. *Uma transformação natural* $\alpha\colon F \longrightarrow G$ *é chamada de* ***isomorfismo natural*** *entre os funtores* F *e* G *quando existe uma transformação natural* $\beta\colon G \longrightarrow F$ *que é um inverso para* α *na categoria Funt(*$\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$*). Em tal caso, os funtores* F *e* G *são ditos* ***naturalmente isomorfos****, e utiliza-se a notação:* $F \cong G$.

Observe as duas composições a seguir:

$$F \xrightarrow{\ \alpha\ } G \xrightarrow{\ \beta\ } F$$

e

$$G \xrightarrow{\ \beta\ } F \xrightarrow{\ \alpha\ } G$$

Dizer que β é o inverso da transformação natural α na categoria Funt($\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$) significa dizer: $\beta \circ \alpha = 1_F$ e $\alpha \circ \beta = 1_G$, onde 1_F é a transformação natural identidade associada ao funtor F e 1_G a transformação natural identidade associada ao funtor G.

Essas equações transformam-se em equações entre as componentes de α e β, assim que fixamos nossa atenção num objeto qualquer X da categoria domínio $\mathscr{C}$. Em outras palavras, dizer $\beta \circ \alpha = 1_F$ significa dizer que $(\beta \circ \alpha)_X = 1_{F(X)}$, ou seja, $\beta_X \circ \alpha_X = 1_{F(X)}$. Por outro lado, dizer $\alpha \circ \beta = 1_G$, significa dizer que $(\alpha \circ \beta)_X = 1_{G(X)}$, isto é, $\alpha_X \circ \beta_X = 1_{G(X)}$. As duas equações juntas

$$\beta_X \circ \alpha_X = 1_{F(X)}$$

e

$$\alpha_X \circ \beta_X = 1_{G(X)}$$

nos dizem que α_X e β_X são inversos um do outro em $\mathscr{D}$.

Conclusão: se α é um morfismo invertível em Funt($\mathscr{C}, \mathscr{D}$), isto é, se α é uma equivalência natural em Funt($\mathscr{C}, \mathscr{D}$), então as componentes α_X da transformação natural α são invertíveis (isomorfismos) em $\mathscr{D}$. Reciprocamente, pode-se demonstrar (exercício 1, abaixo) que se cada componente de uma transformação natural α é um isomorfismo em $\mathscr{D}$, então α é uma equivalência natural (isomorfismo) em Funt($\mathscr{C}, \mathscr{D}$). Essa conclusão pode ser enunciada da seguinte maneira:

> **Proposição 7.1.** *Suponha que F e G são funtores em Funt$(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ e que $\alpha\colon F \to G$ é uma transformação natural entre F e G. Então, α é uma equivalência natural se e somente se, para todo objeto X de $\mathscr{C}$, $\alpha_X\colon F(X) \to G(X)$ é um isomorfismo em $\mathscr{D}$.*

Finalmente, para encerrar esta seção, veremos a seguir alguns exercícios com nossos funtores-hom, estudados no capítulo 6. Funtores-hom são ingredientes fundamentais da Imersão-Yoneda.

7.6.1 Exercícios

1. Prove a recíproca da proposição enunciada acima: se todas as componentes de uma transformação natural α são isomorfismos em $\mathscr{D}$, então α é uma equivalência natural (isomorfismo) em Funt$(\mathscr{C}, \mathscr{D})$.

(Dica: um diagrama como este

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[r, "(\alpha_A)^{-1}"] \arrow[d, "G(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B) \arrow[r, "(\alpha_B)^{-1}"'] & F(A)
\end{tikzcd}$$

em que F e G atuam sobre um morfismo qualquer $f\colon A \to B$ de $\mathscr{C}$, pode ajudar.)

2. Seja $\mathscr{E}$ uma categoria qualquer. Considere a categoria Funt($\mathscr{E}$, **Set**) em que os objetos são funtores-hom covariantes. Sejam A e B dois objetos em $\mathscr{E}$. Temos assim os dois funtores-hom correspondentes aos objetos A e B:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Hom(A,-)}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Hom(B,-)}"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

Considere agora um morfismo qualquer em $\mathscr{E}$, por exemplo:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "f"'] \\
Q
\end{tikzcd}$$

Quando aplicamos o funtor Hom$(A, -)$ sobre este morfismo f de $\mathscr{E}$, obtemos uma função de conjuntos em **Set**:

$$\begin{array}{c} \mathsf{Hom}(A,P) \\ {\scriptstyle \mathsf{Hom}(A,f)}\downarrow \\ \mathsf{Hom}(A,Q) \end{array}$$

Analogamente, quando Hom$(B,-)$ é aplicado sobre f, obtemos um morfismo em **Set**:

$$\begin{array}{c} \mathsf{Hom}(B,P) \\ {\scriptstyle \mathsf{Hom}(B,f)}\downarrow \\ \mathsf{Hom}(B,Q) \end{array}$$

Agora, considere as duas funções acima, imagens de f em **Set**, lado a lado:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Hom}(A,P) & & \mathsf{Hom}(B,P) \\ {\scriptstyle \mathsf{Hom}(A,f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Hom}(B,f)} \\ \mathsf{Hom}(A,Q) & & \mathsf{Hom}(B,Q) \end{array}$$

Se α é uma transformação natural entre os funtores Hom$(A,-)$ e Hom$(B,-)$:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Hom(A,-)}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Hom(B,-)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

então, por definição, existe uma família (coleção) de morfismos em **Set** da forma

$$\alpha_X \colon \mathsf{Hom}(A,X) \longrightarrow \mathsf{Hom}(B,X)$$

tal que, em particular para o morfismo $f\colon P \to Q$ de $\mathscr{E}$, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Hom}(A,P) & \xrightarrow{\alpha_P} & \mathsf{Hom}(B,P) \\ {\scriptstyle \mathsf{Hom}(A,f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Hom}(B,f)} \\ \mathsf{Hom}(A,Q) & \xrightarrow[\alpha_Q]{} & \mathsf{Hom}(B,Q) \end{array}$$

Dizer que o diagrama acima comuta significa afirmar que $\alpha_Q \circ \mathsf{Hom}(A,f) = \mathsf{Hom}(B,f) \circ \alpha_P$.

Com essas especificações, faça o seguinte:

(a) Supondo que $\alpha_P(h) = k$, calcule $\alpha_Q(f \circ h)$.

(Observe: $h \in \mathsf{Hom}(A, P)$ e $k \in \mathsf{Hom}(B, P)$. Agora, use a comutatividade do diagrama.)

(b) Uma componente genérica da transformação natural α é dada por

$$\alpha_X \colon \mathsf{Hom}(A, X) \longrightarrow \mathsf{Hom}(B, X)$$

Então, para $X = A$ obtemos a componente

$$\alpha_A \colon \mathsf{Hom}(A, A) \longrightarrow \mathsf{Hom}(B, A)$$

Logo, o valor $\alpha_A(1_A)$ deve ser um morfismo específico em $\mathsf{Hom}(B, A)$. Vamos denominá-lo m_0 (de "morfismo fixado"). Então, $\alpha_A(1_A) = m_0$, onde $m_0 \in \mathsf{Hom}(B, A)$, isto é, $m_0 \colon B \to A$.

Agora, considere um morfismo qualquer $g \colon A \to X$ e calcule $\alpha_X(g)$.

(Dica: considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}(A, A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}(A,g)"'] & \mathsf{Hom}(B, A) \arrow[d, "\mathsf{Hom}(B,g)"] \\
\mathsf{Hom}(A, X) \arrow[r, "\alpha_X"'] & \mathsf{Hom}(B, X)
\end{tikzcd}$$

use a comutatividade e avalie as duas composições em $1_A \in \mathsf{Hom}(A, A)$. Se você fizer tudo certo, obterá como resultado $\alpha_X(g) = g \circ m_0$, ou seja, as componentes de α parecem ser obtidas de maneira muito simples: basta "multiplicar" a variável g no argumento de α_X por uma constante m_0, pela direita. Mais tarde demonstraremos que isso realmente acontece.)

7.7 A CHAVE PARA A DEMONSTRAÇÃO DO LEMA DE YONEDA

Consideremos novamente a categoria das interpretações do grafo terminal T em conjuntos: $\mathsf{Funt}(C_\ell(T), \textbf{Set})$. Seja $F \colon C_\ell(T) \to \textbf{Set}$ nossa conhecida interpretação de T como o endomorfismo $f \colon \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ que adiciona 1 (módulo 4) e consideremos ainda um funtor-hom covariante $\mathsf{Hom}(K, -) \colon C_\ell(T) \to \textbf{Set}$ (como só existe o objeto K em $C_\ell(T)$, um funtor-hom só poderia ser construído a partir de K).

Queremos construir transformações naturais α entre os funtores Hom$(K,-)$ e F, como ilustrado abaixo:

$$\begin{tikzcd} C_\ell(T) \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Hom(K,-)}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{F}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & \textbf{Set} \end{tikzcd}$$

Por definição, uma transformação natural α entre Hom$(K,-)$ e F é dada por uma família de morfismos $\alpha_X\colon$ Hom$(K,X) \longrightarrow F(X)$, indexados pelos objetos X de $C_\ell(T)$. Mas só há um objeto em $C_\ell(T)$, o objeto K. Logo, toda transformação natural entre Hom$(K,-)$ e F é uma função de conjuntos (um morfismo na categoria codomínio **Set**) da forma:

$$\alpha_K\colon \mathrm{Hom}(K,K) \longrightarrow F(K)$$

ou ainda, como $F(K) = \mathbb{Z}_4$,

$$\alpha_K\colon \mathrm{Hom}(K,K) \longrightarrow \mathbb{Z}_4$$

A transformação natural α_K é uma função de conjuntos e em seu domínio Hom(K,K) existem infinitos elementos, a saber, todas as potências u^n, começando com $u^0 = 1_K\colon K \to K$ e $u^1 = u\colon K \to K$. Existem infinitas funções (arbitrárias) entre Hom$(K,K) = \{1_K, u, u^2, u^3, ...\}$ e $\{0,1,2,3\} = \mathbb{Z}_4$, precisamente $4^{|\mathbb{N}|}$ funções. Mas nem todas elas satisfazem a condição (TN-2) da definição de transformação natural (a naturalidade), ou seja, nem todas serão transformações naturais. Vejamos, então, quais são as funções que satisfazem tal condição.

Vimos anteriormente que o morfismo-identidade $1_K\colon K \to K$ não impõe qualquer restrição sobre as transformações naturais entre interpretações do grafo terminal T em conjuntos. Por isso, concentraremos nossa atenção no endomorfismo $u\colon K \to K$.

Observe os diagramas:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, "u"] \\ K \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(K,K) \arrow[r, "\alpha_K=\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(K,u)"'] & F(K)=\mathbb{Z}_4 \arrow[d, "F(u)=f"] \\ \mathrm{Hom}(K,K) \arrow[r, "\alpha_K=\alpha"'] & F(K)=\mathbb{Z}_4 \end{tikzcd}$$

O da esquerda mostra o endomorfismo $u\colon K \to K$ em $C_\ell(T)$ e o da direita mostra a ação dos funtores Hom$(K,-)$ e F em u, bem como as componentes α_K (iguais) da transformação natural α. Como as componentes são iguais, podemos desprezar o subíndice K e simplificar um pouco o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K & & \mathsf{Hom}(K,K) \xrightarrow{\alpha} F(K) = \mathbb{Z}_4 \\ \downarrow u & & \mathsf{Hom}(K,u)\downarrow \qquad\qquad \downarrow f \\ K & & \mathsf{Hom}(K,K) \xrightarrow[\alpha]{} F(K) = \mathbb{Z}_4 \end{array}$$

Agora a condição (TN-2) da definição de transformação natural (naturalidade) nos diz que uma transformação natural $\alpha\colon \mathsf{Hom}(K,K) \to F(K)$ deve satisfazer a condição

$$\alpha \circ \mathsf{Hom}(K,u) = f \circ \alpha$$

Avaliando as composições acima em $1_K \in \mathsf{Hom}(K,K)$, obtemos:

$$\begin{aligned} [\alpha \circ \mathsf{Hom}(K,u)](1_K) &= (f \circ \alpha)(1_K) \\ \alpha[\mathsf{Hom}(K,u)(1_K)] &= f[\alpha(1_K)] \\ \alpha(u) &= f[\alpha(1_K)] \quad (*) \end{aligned}$$

Avaliando em $u \in \mathsf{Hom}(K,K)$, vem:

$$\begin{aligned} [\alpha \circ \mathsf{Hom}(K,u)](u) &= (f \circ \alpha)(u) \\ \alpha[\mathsf{Hom}(K,u)(u)] &= f[\alpha(u)] \\ \alpha(u \circ u) &= f[\alpha(u)] \\ \alpha(u^2) &= f[\alpha(u)] \quad (**) \end{aligned}$$

Observe que na equação $(**)$ acima reaparece o termo $\alpha(u)$, já definido na equação $(*)$, obtida no passo anterior. Substituindo $\alpha(u)$ por seu valor $f[\alpha(1_K)]$ na equação $(**)$, resulta:

$$\alpha(u^2) = f[\alpha(u)] = f[f[\alpha(1_K)]] = f^2[\alpha(1_K)]$$

Agora, avaliando as composições em $u^2 \in \mathsf{Hom}(K,K)$:

$$\begin{aligned} [\alpha \circ \mathsf{Hom}(K,u)](u^2) &= (f \circ \alpha)(u^2) \\ \alpha[\mathsf{Hom}(K,u)(u^2)] &= f[\alpha(u^2)] \\ \alpha(u^3) &= f[\alpha(u^2)] \quad (***) \end{aligned}$$

Novamente, substituindo em $(***)$ o valor encontrado para $\alpha(u^2)$ no passo anterior, obtemos:

$$\alpha(u^3) = f[\alpha(u^2)] = f[f^2[\alpha(1_K)]] = f^3[\alpha(1_K)]$$

Em geral, portanto, teremos:

$$\alpha(u^n) = f^n[\alpha(1_K)]$$

e essa condição, obtida, como vimos, da naturalidade da transformação α, pode ser agora adotada como a definição de uma transformação natural $\alpha\colon \text{Hom}(K,K) \longrightarrow \mathbb{Z}_4$. Em outras palavras, dentre as $4^{|\mathbb{N}|}$ funções arbitrárias de conjuntos entre $\text{Hom}(K,K)$ e $\mathbb{Z}_4$, apenas as funções definidas por

$$\begin{aligned}\alpha\colon \text{Hom}(K,K) &\longrightarrow \mathbb{Z}_4\\ u^n &\longmapsto \alpha(u^n) = f^n[\alpha(1_K)]\end{aligned}$$

serão transformações naturais entre os funtores $\text{Hom}(K,-)$ e F.

A definição de α nos diz que

$$\alpha(u^n) = f^n[\alpha(1_K)]$$

Para calcularmos, por exemplo, o valor $\alpha(u)$ em $\mathbb{Z}_4$ devemos, primeiro, determinar $\alpha(1_K)$, e depois calcular ainda $f[\alpha(1_K)]$.

Ou seja, todo o cálculo depende de $\alpha(1_K)$, isto é, qual elemento de $\mathbb{Z}_4$ será a imagem do morfismo-identidade da categoria domínio! Tudo começa, portanto, com uma escolha arbitrária, que denominamos "condição inicial" nas diversas variações desse tema que vimos anteriormente.

Façamos, então, a seguinte escolha:

$$\alpha(1_K) = 0$$

Essa escolha determina uma única transformação natural entre os funtores $\text{Hom}(K,-)$ e F? Vejamos:

Da definição $\alpha(u^n) = f^n[\alpha(1_K)]$, obtemos:

$$\alpha(u) = f[\alpha(1_K)] = f(0) = 1$$

Logo, $\alpha(1_K) = 0$ e $\alpha(u) = 1$. E quanto a $\alpha(u^2)$? Façamos o cálculo:

$$\alpha(u^2) = f^2[\alpha(1_K)] = f^2(0) = f(f(0)) = f(1) = 2$$

Para $\alpha(u^3)$, temos:

$$\alpha(u^3) = f^3[\alpha(1_K)] = f^3(0) = f[f^2(0)] = f(2) = 3$$

Muito interessante. E quanto a $\alpha(u^4)$? Façamos o cálculo:

$$\alpha(u^4) = f^4[\alpha(1_K)] = f^4(0) = f[f^3(0)] = f(3) = 0$$

Pronto. A partir daqui os valores começam a se repetir. Se n deixa resto 0 na divisão por 4, $\alpha(u^n) = 0$. Se n deixa resto 1 na divisão por 4, $\alpha(u^n) = 1$, etc. Dessa forma, cada um dos infinitos elementos de Hom$(K, K) = \{1_K, u, u^2, ...\}$ é associado a um único elemento em $\mathbb{Z}_4$. Portanto, a escolha $\alpha(1_K) = 0$ e a condição $\alpha(u^n) = f^n[\alpha(1_K)]$ determinam uma única função α: Hom$(K, K) \longrightarrow \mathbb{Z}_4$, que é uma transformação natural entre Hom$(K, -)$ e F.

Quantas transformações naturais dessas existem?

7.7.1 Exercícios

1. Verifique se a escolha $\beta(1_K) = 1$ determina uma única transformação natural entre Hom$(K, -)$ e F. Adote $\beta(u^n) = f^n[\beta(1_K)]$ como definição de β.

2. Faça o mesmo para $\gamma(1_K) = 2$ e $\delta(1_K) = 3$.

3. Responda com *sim* ou com *não*:

(a) Parece razoável dizer que cada escolha para $\varphi(1_K)$ em $F(K) = \mathbb{Z}_4$ determina uma única transformação natural φ entre Hom$(K, -)$ e F?

4. Nos itens anteriores construímos quatro transformações naturais entre Hom$(K, -)$ e F: α, β, γ e δ, uma para cada possível valor a ser atribuído a 1_K em $F(K) = \mathbb{Z}_4$. De agora em diante, este conjunto de transformações naturais será representado com Nat(Hom$(K, -)$, F). Assim,

$$\text{Nat}(\text{Hom}(K, -), F) = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

Observe que este conjunto é a coleção de morfismos entre os objetos Hom$(K, -)$ e F na categoria Funt$(C_\ell(T), \textbf{Set})$. Se não adotássemos essa nova convenção de notação, deveríamos escrever:

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \text{Hom}_{\text{Funt}(C_\ell(T), \textbf{Set})}(\text{Hom}(K, -),\ F)$$

Mesmo omitindo a menção explícita à categoria de funtores, a notação ainda ficaria esquisita:

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \text{Hom}(\text{Hom}(K, -),\ F)$$

Como temos o hábito de distribuir coisas no interior do argumento, poderíamos ficar tentados a escrever Hom(Hom$(K, -)$, F) = (Hom$^2(K, -)$, Hom(F)), o que, evidentemente, é loucura. Para evitar esse tipo de tentação, é melhor escrever

$$\text{Hom}(\text{Hom}(K, -),\ F) = \text{Nat}(\text{Hom}(K, -),\ F)$$

Então, daqui pra frente, Nat(Hom$(K, -)$, F) representa o conjunto de transformações naturais entre os funtores Hom$(K, -)$ e F.

5. Responda com *sim* ou com *não*:

(a) Você diria que uma transformação natural α entre Hom$(K, -)$ e F pode ser obtida definindo suas componentes de modo mais simples, através da fórmula:

$$\alpha_K(h) = [F(h)](a)$$

em que $a = \alpha_K(1_K)$?

Observe que, abandonando o subíndice K, escrevendo apenas α, substituindo h por u, e a por $0 \in \mathbb{Z}_4$, obtemos:

$$\alpha(u) = [F(u)](0) = f(0) = 1$$

Para $h = u^2$, temos:

$$\begin{aligned}
\alpha(u^2) = [F(u^2)](0) &= [F(u \circ u)](0) \\
&= [F(u) \circ F(u)](0) \\
&= [f \circ f](0) \\
&= f^2(0) = f(f(0)) = f(1) = 2
\end{aligned}$$

A fórmula parece suficiente para determinar a transformação natural α que vimos anteriormente?

(b) Mostre que as duas fórmulas $\varphi(u^n) = f^n[\varphi(1_K)]$ e $\varphi(u) = [F(u)](b)$, em que $b = \varphi(1_K)$, definem a mesma transformação natural.

(Ou seja, a condição inicial e o cálculo sobre u são suficientes para determinar φ. As demais iterações, que correspondem ao algoritmo que seguíamos nas variações desse problema apresentadas nos exemplos, são meras consequências desses dois passos iniciais.)

(c) Parece razoável dizer que a cada elemento a_0 em $F(K) = \mathbb{Z}_4$ corresponde uma única transformação natural entre Hom$(K, -)$ e F?

(d) Poderíamos dizer que o conjunto Nat de todas as transformações naturais entre Hom$(K, -)$ e F é isomorfo (como conjunto) a $F(K)$?

7.8 EM RESUMO...

Vamos generalizar e ao mesmo tempo resumir toda a discussão anterior no seguinte surpreendente resultado:

Proposição 7.2. *Para todo funtor $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set**, para todo objeto A de $\mathscr{C}$, e para todo elemento $a \in F(A)$, existe uma única transformação natural*

$$\gamma\colon \mathit{Hom}(A,-) \longrightarrow F$$

satisfazendo $\gamma_A(1_A) = a$.

Observe: a categoria domínio $\mathscr{C}$ é agora inteiramente arbitrária, não é mais uma categoria com um único objeto... O funtor F é também inteiramente arbitrário, não temos a menor ideia do que ele faz. Portanto, é um resultado de grande generalidade. E, no entanto, nos parece agora muito familiar, pois estivemos trabalhando com vários casos particulares dele durante todo esse tempo.

O ambiente em que estamos é, como anteriormente, o de uma categoria de funtores com valores em conjuntos: Funt($\mathscr{C}$, **Set**). A transformação natural γ que presumivelmente existe e é única pode ser representada como:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Hom(A,-)}"] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{F}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \gamma"] & \textbf{Set}
\end{tikzcd}$$

Quando um objeto qualquer A de $\mathscr{C}$ é interpretado por F, transforma-se no conjunto $F(A)$. Escolhemos um elemento qualquer desse conjunto, digamos, a. Então, γ é a única transformação natural entre Hom$(A,-)$ e F cuja componente γ_A transforma o morfismo-identidade do objeto A justamente nesse elemento a. As demonstrações apresentadas nas próximas seções estão feitas integralmente ou esboçadas em pouco mais de meia página (recorde mundial de concisão) em (ADAMEK; HERRLICH; STRECKER, 2004, p. 88). No CTCS há outra abordagem, mas lá o Lema de Yoneda não está na posição de "lema": ele é demonstrado *depois* do teorema de imersão! Acreditamos que estudando as duas demonstrações obtém-se uma visão mais ampla e adequada do assunto.

Demonstração. Afirmamos que definindo as componentes por $\gamma_X(f) = [F(f)](a)$ obtemos a transformação natural procurada.

(Essa é a fórmula que vimos no exercício 5 da seção anterior. Ela nos diz que as componentes que constituem a transformação natural γ associam um morfismo $f\colon A \to X$ de $\mathscr{C}$ ao valor da função $F(f)$ no ponto a.)

Parte I (Existência).

(1) Em primeiro lugar, vejamos se as componentes de $\gamma\colon \mathsf{Hom}(A,-) \longrightarrow F$ estão bem definidas. Suas componentes são da forma:

$$\begin{aligned} \gamma_X\colon \mathsf{Hom}(A,X) &\longrightarrow F(X) \\ g &\longmapsto [F(g)](a) \end{aligned}$$

Um morfismo qualquer $g\colon A \to X$ é transformado por F em uma função de conjuntos $F(g)\colon F(A) \to F(X)$. Faz sentido, portanto, calcularmos o valor $F(g)(a)$. Este valor será, então, a imagem em $F(X)$ do morfismo g pela componente γ_X da transformação natural γ. Ou seja, as componentes estão bem definidas: para cada morfismo g, há um único ponto em $F(X)$, dado por $F(g)(a)$.

(2) Vejamos se esta candidata ao cargo de transformação natural, do modo como foi definida, atende à condição dada no enunciado: $\gamma_A(1_A) = a$.

$$\text{Temos: } \gamma_A(1_A) = F(1_A)(a) = 1_{F(A)}(a) = a \qquad \text{(funcionou).}$$

(3) Resta apenas a naturalidade. Consideremos $f\colon B \to C$ um morfismo qualquer em $\mathscr{C}$. Observe os diagramas abaixo. O da esquerda mostra o morfismo f em $\mathscr{C}$. O da direita mostra a ação dos funtores $\mathsf{Hom}(A,-)$ e F sobre o morfismo f e as componentes de γ (o diagrama da direita está em **Set**):

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"] \\ C \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \mathsf{Hom}(A,B) \arrow[r, "\gamma_B"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}(A,f)"'] & F(B) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathsf{Hom}(A,C) \arrow[r, "\gamma_C"'] & F(C) \end{tikzcd}$$

Devemos provar que o diagrama da direita comuta. Ou seja, verificar a seguinte igualdade:

$$\gamma_C \circ \mathsf{Hom}(A,f) = F(f) \circ \gamma_B$$

Ora, esta é apenas uma igualdade entre funções. Como as duas composições têm o mesmo domínio e o mesmo contradomínio, só precisamos verificar se assumem o mesmo valor em todos os pontos do domínio comum. Seja $h\colon A \to B$ um morfismo qualquer em $\mathsf{Hom}(A, B)$. Temos:

(i) $[\gamma_C \circ \mathsf{Hom}(A, f)](h) = \gamma_C[\mathsf{Hom}(A, f)(h)] = \gamma_C(f \circ h) = [F(f \circ h)](a) = [F(f) \circ F(h)](a)$

(ii) $[F(f) \circ \gamma_B](h) = F(f)[\gamma_B(h)] = F(f)[F(h)(a)] = [F(f) \circ F(h)](a)$

De (i) e (ii), obtemos: $\gamma_C \circ \mathsf{Hom}(A, f) = F(f) \circ \gamma_B$. Portanto, o diagrama comuta para qualquer morfismo f no domínio dos funtores F e $\mathsf{Hom}(A, -)$. Logo, γ é de fato uma transformação natural.

Parte II (Unicidade).

Suponhamos que exista outra transformação natural $\delta\colon \mathsf{Hom}(A, -) \longrightarrow F$ satisfazendo $\delta_A(1_A) = a$. O diagrama da esquerda mostra um morfismo $f\colon A \to X$ em $\mathscr{C}$. O da direita mostra a ação dos funtores $\mathsf{Hom}(A, -)$ e F sobre o morfismo f e as componentes das duas transformações naturais γ e δ.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \\
X
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}(A, A) \arrow[r, shift left, "\delta_A"] \arrow[r, shift right, "\gamma_A"'] \arrow[d, "\mathsf{Hom}(A,f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathsf{Hom}(A, X) \arrow[r, shift left, "\delta_X"] \arrow[r, shift right, "\gamma_X"'] & F(X)
\end{tikzcd}
$$

Queremos provar que $\gamma = \delta$. A única coisa que podemos fazer é usar as hipóteses de que dispomos. Neste caso, a comutatividade do diagrama e $\delta_A(1_A) = a$.

Avaliando as composições em 1_A e usando a comutatividade do diagrama, obtemos:

$$
\begin{aligned}
(i)\quad [\gamma_X \circ \mathsf{Hom}(A, f)](1_A) &= [F(f) \circ \gamma_A](1_A) \\
\gamma_X[\mathsf{Hom}(A, f)(1_A)] &= F(f)[\gamma_A(1_A)] \\
\gamma_X(f) &= F(f)(a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ii)\quad [\delta_X \circ \mathsf{Hom}(A, f)](1_A) &= [F(f) \circ \delta_A](1_A) \\
\delta_X[\mathsf{Hom}(A, f)(1_A)] &= F(f)[\delta_A(1_A)] \\
\delta_X(f) &= F(f)(a)
\end{aligned}
$$

As equações (i) e (ii) mostram-nos que $\gamma_X(f) = F(f)(a) = \delta_X(f)$, ou seja, $\gamma = \delta$, como queríamos. ■

(No diagrama anterior, observe que embora tenhamos definido as composições no conjunto Hom(A, A), para assim usar a hipótese de que $\delta_A(1_A) = a = \gamma_A(1_A)$, a base do diagrama é a única coisa que de fato interessa: ela relaciona Hom(A, X) com $F(X)$, algo inteiramente geral. E os cálculos nos dizem que $\gamma_X(f) = \delta_X(f)$, isto é, que todas as componentes de γ e de δ assumem o mesmo valor em um elemento arbitrário f de Hom(A, X). Sendo assim, todas as componentes são iguais, o que implica que as duas transformações naturais são iguais.)

8 LEMA DE YONEDA

Finalmente chegamos ao nosso objetivo. Com as ferramentas que construímos nos capítulos anteriores, já temos condições de enunciar e demonstrar o Lema de Yoneda e seus corolários.

Corolário 8.1. ***(da Proposição 7.2) LEMA DE YONEDA.***
*Para todo funtor $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set**, para todo objeto A de $\mathscr{C}$, a função:*

$$\psi\colon \mathit{Nat}(\mathit{Hom}(A,-),\, F) \longrightarrow F(A)$$

definida por

$$\psi(\beta) = \beta_A(1_A)$$

é uma bijeção.

O que o Lema de Yoneda nos diz é que a função ψ que atribui a uma transformação natural qualquer $\beta\colon \mathrm{Hom}(A,-) \longrightarrow F$ o valor $\beta(1_A) \in F(A)$ é uma bijeção. Ou seja, para cada transformação natural entre $\mathrm{Hom}(A,-)$ e F existe um único ponto em $F(A)$, e vice-versa: para cada ponto em $F(A)$, há uma única transformação natural entre $\mathrm{Hom}(A,-)$ e F. Portanto, como meros conjuntos, $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),\, F)$ e $F(A)$ são isomorfos. Vimos um caso particular desse fenômeno em nossos exercícios ao final do capítulo 7.

Precisamos mostrar que ψ é uma função bijetora. Há sempre duas possibilidades: ou mostrar que ψ é injetora e sobrejetora, ou exibir diretamente a função inversa de ψ. Aqui, estamos apresentando o Lema de Yoneda como um corolário da Proposição 7.2. De acordo com Joseph Rotman e suas incríveis pesquisas etimológicas, *corolário* significa basicamente "um presente" que ganhamos de um teorema, algo que "vem de graça", como é costume dizer-se.[1] Assim, deve ser muito fácil demonstrar um corolário. Quando estamos com dificuldade para demonstrar um corolário, não estamos sabendo lidar com o presente, o que significa que não entendemos o teorema. Para aproveitar o presente que ganhamos da Proposição 7.2, vamos mostrar que ψ é injetora e sobrejetora.

Demonstração.

(1) Injetividade.

Dadas α e β em $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),\, F)$, suponhamos $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$. Pela definição da função ψ, obtemos:

$$\psi(\alpha) = \psi(\beta) \iff \alpha_A(1_A) = \beta_A(1_A) = a_0 \in F(A)$$

[1] Confira a surpreendente hipótese para a origem dessa palavra. Está no Prefácio (ROTMAN, 2006).

Ora, pela proposição anterior, existe uma única transformação natural

$\gamma\colon \text{Hom}(A,-) \longrightarrow F$ satisfazendo $\gamma_A(1_A) = a_0$. Logo, $\gamma = \alpha = \beta$, ou seja, $\psi(\alpha) = \psi(\beta) \implies \alpha = \beta$. Portanto, ψ é injetora.

(2) Sobrejetividade.

Devemos provar que um ponto qualquer em $F(A)$ é a imagem, por ψ, de alguma transformação natural em Nat(Hom$(A,-)$, F).

Consideremos, então, $a_1 \in F(A)$. Novamente, pela proposição anterior, sabemos que para todo funtor $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set**, para todo objeto A de $\mathscr{C}$ e para todo ponto $a \in F(A)$, existe uma (única) transformação natural $\gamma\colon \text{Hom}(A,-) \longrightarrow F$ satisfazendo $\gamma_A(1_A) = a$.

Em particular, portanto, para $a_1 \in F(A)$, existe uma (única) transformação natural $\gamma'\colon \text{Hom}(A,-) \longrightarrow F$ tal que $\gamma'_A(1_A) = a_1$. Isto significa que $a_1 = \gamma'_A(1_A) = \psi(\gamma')$. Logo, ψ é sobrejetora. $\blacksquare$

Legal! Provamos o Lema de Yoneda! Falta apenas a Imersão-Yoneda (a parte mais importante). Vejamos, então, finalmente, o tal funtor que transforma as coisas em ouro!

8.1 O FUNTOR YONEDA

Definição 8.1. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria qualquer.*

*O funtor $Y\colon \mathscr{C}^{op} \longrightarrow$ Funt($\mathscr{C}$, **Set**), chamado de **Funtor Yoneda**, é definido da seguinte maneira:*

(Y-1) Para um objeto qualquer C de $\mathscr{C}$, $Y(C) =$ Hom$(C,-)$.

(Y-2) Se $f\colon D \to C$ é um morfismo em $\mathscr{C}$, então $f\colon C \to D$ é um morfismo em $\mathscr{C}^{op}$. Para este morfismo $f\colon C \to D$ de $\mathscr{C}^{op}$, temos:

$$\begin{aligned} Y(f\colon C \to D) &= Y(f)\colon Y(C) \longrightarrow Y(D) \\ &= \mathit{Hom}(f,-)\colon \mathit{Hom}(C,-) \longrightarrow \mathit{Hom}(D,-) \end{aligned}$$

Se A é um objeto qualquer de $\mathscr{C}$, então a componente $Y(f)_A =$ Hom(f,A) da transformação natural $Y(f)$ é dada por:

$$Y(f)_A = \mathit{Hom}(f,A)\colon \mathit{Hom}(C,A) \longrightarrow \mathit{Hom}(D,A)$$

Lembrando que, para um morfismo qualquer $h\colon C \to A$ de Hom(C, A), temos:

$$\begin{aligned} Y(f)_A = \textit{Hom}(f, A)\colon \textit{Hom}(C, A) &\longrightarrow \textit{Hom}(D, A) \\ h &\longmapsto \textit{Hom}(f, A)(h) = h \circ f \end{aligned}$$

Observação: O funtor acima é chamado de *Funtor Yoneda contravariante* (por isso está definido em $\mathscr{C}^{op}$). Sendo assim, se quisermos avaliar sua ação num morfismo $f\colon A \to B$ de $\mathscr{C}$, devemos considerar $f\colon B \to A$ em $\mathscr{C}^{op}$ e aplicar o Funtor Yoneda sobre este último. Na definição acima, começamos com uma flecha em $\mathscr{C}$ já invertida, que é "desinvertida" em $\mathscr{C}^{op}$. Essa foi a escolha feita no CTCS, e estamos seguindo a mesma convenção aqui apenas para que você não se atrapalhe quando for consultar o livro (BARR; WELLS, 2012, p. 121).

A definição dá um nome (Funtor Yoneda) para algo que, presumivelmente, é um funtor. Mas será que as especificações acima realmente definem um funtor? Vejamos:

(1) Em primeiro lugar, precisamos saber o que está acontecendo. O Funtor Yoneda converte objetos quaisquer C da categoria domínio $\mathscr{C}^{op}$ em funtores Hom$(C, -)$ na categoria codomínio Funt$(\mathscr{C}, \textbf{Set})$. Um morfimo $f\colon C \to D$ de $\mathscr{C}^{op}$ é convertido em uma transformação natural

$$Y(f) = \text{Hom}(f, -)\colon \text{Hom}(C, -) \longrightarrow \text{Hom}(D, -)$$

Em outras palavras, o diagrama em $\mathscr{C}^{op}$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f"'] \\ D \end{tikzcd}$$

é transformado, por Y, no seguinte diagrama em Funt$(\mathscr{C}, \textbf{Set})$:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, bend left, "\text{Hom(C,}-\text{)}"] \arrow[rr, bend right, "\text{Hom(D,}-\text{)}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \text{Y(f)}"] & & \textbf{Set} \end{tikzcd}$$

A condição (1) da definição de funtor está, em tese, satisfeita: objeto é levado em objeto (funtor-hom) e morfismo é levado em morfismo (transformação natural). Mas será que $Y(f)$, como foi definida, realmente é uma transformação natural entre os funtores Hom$(C, -)$ e Hom$(D, -)$? Vamos conferir.

Consideremos

$$Y(f) = \text{Hom}(f, -)\colon \text{Hom}(C, -) \longrightarrow \text{Hom}(D, -)$$

Verificar que essa expressão realmente define um morfismo em Funt($\mathscr{C}$, **Set**), isto é, uma transformação natural, significa testar as duas condições da definição de transformação natural. A condição (TN-1) nos diz que para todo objeto A de $\mathscr{C}$ (o domínio dos funtores-hom) deve existir um morfismo indexado por A na categoria codomínio (**Set**), que estamos definindo como:

$$\begin{aligned} Y(f)_A = \mathsf{Hom}(f, A) \colon \mathsf{Hom}(C, A) &\longrightarrow \mathsf{Hom}(D, A) \\ h &\longmapsto \mathsf{Hom}(f, A)(h) = h \circ f \end{aligned}$$

até aqui, nenhum problema. Só precisamos conferir a naturalidade, isto é, a condição (TN-2). Aplicando os dois funtores $\mathsf{Hom}(C, -)$ e $\mathsf{Hom}(D, -)$ em um morfismo qualquer $g \colon A \to B$ de $\mathscr{C}$, obtemos:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}(C, A) \arrow[r, "Y(f)_A"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}(C,g)"'] & \mathsf{Hom}(D, A) \arrow[d, "\mathsf{Hom}(D,g)"] \\ \mathsf{Hom}(C, B) \arrow[r, "Y(f)_B"'] & \mathsf{Hom}(D, B) \end{tikzcd}$$

Devemos provar que o diagrama acima comuta. Então, consideremos um morfismo qualquer $h \colon C \to A$ em $\mathsf{Hom}(C, A)$. Calculando as composições em h, obtemos:

$$\begin{aligned} [Y(f)_B \circ \mathsf{Hom}(C, g)](h) &= Y(f)_B[\mathsf{Hom}(C, g)(h)] \\ &= Y(f)_B(g \circ h) \\ &= [\mathsf{Hom}(f, B)](g \circ h) \\ &= (g \circ h) \circ f \quad (*) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} [\mathsf{Hom}(D, g) \circ Y(f)_A](h) &= \mathsf{Hom}(D, g)[Y(f)_A(h)] \\ &= \mathsf{Hom}(D, g)[\mathsf{Hom}(f, A)(h)] \\ &= \mathsf{Hom}(D, g)(h \circ f) \\ &= g \circ (h \circ f) \quad (**) \end{aligned}$$

Por $(*)$ e $(**)$ vemos que o diagrama de fato comuta. Logo, $Y(f)$ realmente é uma transformação natural. Observe que a naturalidade de $Y(f)$ reduz-se à associatividade da composição em **Set**!

(2) Vejamos agora se o Funtor Yoneda preserva morfismos-identidade. Isto é, se um morfismo identidade em $\mathscr{C}^{op}$ é convertido por Y em uma transformação natural identidade em Funt($\mathscr{C}$, **Set**):

Consideremos $1_A\colon A \to A$ em $\mathscr{C}^{op}$. Aplicando Y sobre este morfismo, obtemos:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Hom(A,-)}"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{Hom(A,-)}"'{name=D}] & \textbf{Set} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\mathrm{Y(1_A)}"] \end{tikzcd}$$

Por definição, $Y(1_A) = \mathsf{Hom}(1_A, -)\colon \mathsf{Hom}(A, -) \longrightarrow \mathsf{Hom}(A, -)$. Dado um objeto qualquer X de $\mathscr{C}^{op}$, a componente $Y(1_A)_X$ da transformação natural $Y(1_A)$ é dada por

$$Y(1_A)_X = \mathsf{Hom}(1_A, X)\colon \mathsf{Hom}(A, X) \longrightarrow \mathsf{Hom}(A, X)$$

Assim, para um morfismo qualquer $g\colon A \to X$, temos $\mathsf{Hom}(1_A, X)(g) = g \circ 1_A = g$, portanto, $Y(1_A)_X = \mathsf{Hom}(1_A, X) = 1_{\mathsf{Hom}(A,X)}$. Assim, cada uma das componentes de $Y(1_A)$ é o morfismo-identidade do conjunto-hom correspondente; logo, $Y(1_A) = 1_{\mathsf{Hom}(A,-)}$.

(3) Vejamos agora se Y preserva a composição. Consideremos a seguinte composição em $\mathscr{C}$ (Atenção: estamos em $\mathscr{C}$ mesmo, não na categoria oposta!):

$$D \xrightarrow{\quad f \quad} C \xrightarrow{\quad g \quad} B$$

Quando aplicarmos o Funtor Yoneda nessa composição (ele é contravariante), as flechas serão invertidas. Obteremos:

$$Y(D) \xleftarrow{\quad Y(f) \quad} Y(C) \xleftarrow{\quad Y(g) \quad} Y(B)$$

Refletindo o diagrama,

$$Y(B) \xrightarrow{\quad Y(g) \quad} Y(C) \xrightarrow{\quad Y(f) \quad} Y(D)$$

Temos, portanto, a seguinte composição em **Set**:

$$\begin{tikzcd} Y(B) \arrow[r, "Y(g)"'] \arrow[rr, bend left, "Y(f)\circ Y(g)"] & Y(C) \arrow[r, "Y(f)"'] & Y(D) \end{tikzcd} \tag{8.1}$$

Usando a definição, vem:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}(B,-) \arrow[r, "\mathsf{Hom}(g,-)"'] \arrow[rr, bend left, "\mathsf{Hom}(f,-)\circ \mathsf{Hom}(g,-)"] & \mathsf{Hom}(C,-) \arrow[r, "\mathsf{Hom}(f,-)"'] & \mathsf{Hom}(D,-) \end{tikzcd} \tag{8.2}$$

Por outro lado, se houvéssemos aplicado o funtor Y diretamente na composição

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, bend left, "g \circ f"] & B \end{tikzcd}$$

obteríamos

$$\begin{tikzcd} Y(D) & Y(B) \arrow[l, bend right, "Y(g \circ f)"'] \end{tikzcd}$$

Refletindo o diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y(B) \arrow[r, bend left, "Y(g \circ f)"] & Y(D) \end{tikzcd} \tag{8.3}$$

Aplicando a definição,

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}(B, -) \arrow[r, bend left, "\mathsf{Hom}(g \circ f, -)"] & \mathsf{Hom}(D, -) \end{tikzcd} \tag{8.4}$$

Então, provar que Y preserva a composição é o mesmo que demonstrar a igualdade sugerida pelos diagramas (10.1) e (10.3) acima, ou seja:

$$Y(g \circ f) = Y(f) \circ Y(g)$$

ou, comparando os diagramas (10.2) e (10.4)

$$\mathsf{Hom}(g \circ f, -) = \mathsf{Hom}(f, -) \circ \mathsf{Hom}(g, -)$$

Apesar da aparência às vezes um pouco assustadora, essas equações reduzem-se, no final, a equações entre funções-hom: serão apenas equações entre funções de conjuntos. Como demonstramos que duas funções são iguais? Primeiro verificamos se têm o mesmo domínio e o mesmo codomínio. Em caso afirmativo, verificamos se as funções assumem os mesmos valores em cada ponto do domínio comum.

No caso das transformações naturais, *igualdade* significa *igualdade de cada componente*. Para verificar se todas as componentes são iguais, devemos escolher um objeto arbitrário em $\mathscr{C}^{op}$, digamos X, e em seguida um morfismo arbitrário no domínio dessas composições, digamos $h\colon C \to X$.

Uma componente genérica da transformação natural acima é, então, dada por:

$$\mathsf{Hom}(g \circ f, X) = \mathsf{Hom}(f, X) \circ \mathsf{Hom}(g, X)$$

Agora temos uma igualdade entre funções-hom. Para um morfismo $h\colon C \to X$ qualquer, temos:

$$\mathsf{Hom}(g \circ f, X)(h) = h \circ (g \circ f) \qquad (*)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}[\mathsf{Hom}(f, X) \circ \mathsf{Hom}(g, X)](h) &= \mathsf{Hom}(f, X) \circ [\mathsf{Hom}(g, X)(h)] \\ &= [\mathsf{Hom}(f, X)](h \circ g)] \\ &= (h \circ g) \circ f \qquad (**)\end{aligned}$$

Por $(*)$ e $(**)$, concluímos que

$$Y(g \circ f) = Y(f) \circ Y(g)$$

logo, Y preserva a composição. É, de fato, um funtor contravariante.

8.2 FIEL, PLENO E INJETIVO EM OBJETOS

Uma categoria é um tipo especial de grafo. Um funtor é, então, um homomorfismo de grafos. Observe a representação esquemática das categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ abaixo:

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & D_1 \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\ C_0 & D_0 \end{tikzcd}$$

As funções *domínio* e *codomínio*, por economia de caracteres, estão representadas por s e t, respectivamente. C_1 denota a coleção de morfismos da categoria $\mathscr{C}$. A coleção de objetos de $\mathscr{C}$ é representada por C_0. A mesma convenção vale para a categoria $\mathscr{D}$.

O trabalho de um funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ pode ser representado assim:

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & D_1 \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\ C_0 \arrow[r, "F_0"'] & D_0 \end{tikzcd} \tag{8.5}$$

A componente F_1 do funtor F atua nos ingredientes de dimensão 1 da categoria $\mathscr{C}$: nas flechas (morfismos). A componente F_0 do funtor F atua nos ingredientes de dimensão 0 da categoria $\mathscr{C}$: nos vértices (objetos).

É natural perguntarmos:

Se a componente F_0 do funtor F, que atua nos objetos, for injetiva, isto implicará que F_1 é injetiva? Em outras palavras: um funtor F que não colapsa objetos distintos (não transforma dois objetos diferentes do domínio C_0 no mesmo objeto em D_0) pode colapsar flechas distintas?

Observe:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \arrow[rr, phantom, ""] & & X \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

$$\xrightarrow{F}$$

O funtor F é injetivo em objetos: $F_0(A) = X$ e $F_0(B) = Y$ (objetos distintos são transformados em objetos distintos). Mas F *não é* injetivo em morfismos, porque $F_1(f) = F_1(g) = h$, com $f \neq g$. Ou seja, mesmo quando sabemos que F_0 é injetiva, nada se pode afirmar, em princípio, a respeito de F_1. Assim, o fato de um funtor F ser injetivo em objetos *não implica* que seja injetivo em morfismos.

Por outro lado, veja:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B & & X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "k"'] & Y \\ C \arrow[r, "g"] & D & & & Z \end{tikzcd}$$

$$\xrightarrow{F}$$

O funtor F acima é injetivo em morfismos: $F_1(f) = h$ e $F_1(g) = k$, mas *não é* injetivo em objetos, porque $F(A) = F(C) = X$, mas $A \neq C$. Ou seja, mesmo quando sabemos que F_1 é injetiva, nada se pode afirmar, em princípio, a respeito de F_0. Assim, o fato de um funtor F ser injetivo em morfismos *não implica* que seja injetivo em objetos.

Como se vê, as componentes F_1 e F_0 de um funtor, ao menos quanto ao critério *injetividade*, são "independentes", isto é, o comportamento de uma não está atrelado ao comportamento da outra. Assim, se quisermos analisar a qualidade da reprodução de $\mathscr{C}$ realizada em $\mathscr{D}$ pelo funtor F, precisamos estudar as componentes separadamente.

Se $\mathscr{C}$ for uma categoria grande, a coleção C_1 de morfismos não será um conjunto, e sim uma classe. Isto poderia nos conduzir a dificuldades formais. Para evitá-las, usamos uma *abordagem local:* investigamos o trabalho da componente F_1 em conjuntos-hom, e não na coleção C_1 de morfismos de $\mathscr{C}$. Surge assim o conceito de *função induzida pelo funtor F.*

Definição 8.2. *Considere um funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. Para um par qualquer de objetos A e B de $\mathscr{C}$, a função*

$$\begin{aligned} \hat{F}\colon \mathit{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) &\longrightarrow \mathit{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B)) \\ (f\colon A\to B) &\longmapsto \hat{F}(f\colon A\to B) = F(f\colon A\to B) \end{aligned}$$

*é chamada de **função induzida pelo funtor F**.*

Observe que $\hat{F}$ é a restrição de F_1 ao conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$. Para cada par de objetos (X,Y) de $\mathscr{C}$ temos uma função induzida diferente. A maioria dos autores prefere, contudo, considerar a função induzida como uma coisa só, definida de uma vez por todas.[2] Note também que, na definição acima, omitimos os subíndices de F_1 e F_0, como temos feito, aliás, desde o início.

Vejamos mais três definições:

Definição 8.3. *Um funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é chamado de **fiel** quando sua função induzida*

$$\hat{F}\colon \mathit{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \longrightarrow \mathit{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$$

é injetiva para qualquer conjunto-hom, isto é, para todo par (X,Y) de objetos de $\mathscr{C}$.

Um funtor fiel reproduz "fielmente" os morfismos de $\mathscr{C}$ em $\mathscr{D}$, isto é, nunca colapsa flechas distintas. Morfismos distintos do domínio $\mathscr{C}$ são levados em morfismos distintos no codomínio $\mathscr{D}$.

Agora, a plenitude:

Definição 8.4. *Um funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é chamado de **pleno** quando sua função induzida*

$$\hat{F}\colon \mathit{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \longrightarrow \mathit{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$$

é sobrejetiva para qualquer conjunto-hom, isto é, para todo par (X,Y) de objetos de $\mathscr{C}$.

Dizer que F é pleno significa dizer que todo morfismo da forma $F(A) \to F(B)$ em $\mathscr{D}$ é a imagem, por $\hat{F}$, de algum morfismo em $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$. Em outras palavras, não há relações entre $F(A)$ e $F(B)$ na categoria $\mathscr{D}$ além daquelas que são a imagem de relações prévias estabelecidas entre A e B na categoria domínio $\mathscr{C}$.

2 Cf. (BARR; WELLS, 2012, p. 80)

Finalmente, o conceito de *imersão plena*:

Definição 8.5. *Um funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é chamado de uma* ***imersão plena*** *quando é fiel, pleno e injetivo em objetos.*

Uma imersão plena é uma reprodução "praticamente exata", digamos assim, da categoria $\mathscr{C}$ na categoria $\mathscr{D}$. É o ideal a ser atingido em termos de transportar problemas de um universo para outro. Mergulhamos a categoria $\mathscr{C}$ na categoria $\mathscr{D}$, porque é mais fácil trabalhar em $\mathscr{D}$. Em seguida, resolvemos os problemas de $\mathscr{C}$ usando sua reprodução em $\mathscr{D}$, depois traduzimos a solução para a linguagem de $\mathscr{C}$.[3] Mas para que esse processo funcione, a imersão tem que ser plena.

Chegamos, assim, ao teorema de imersão, um corolário do Lema de Yoneda.

Teorema 8.1. ***IMERSÃO-YONEDA (Yoneda Embedding).***
O Funtor Yoneda

$$Y : \mathscr{C}^{op} \longrightarrow \mathit{Funt}(\mathscr{C}, \textbf{\textit{Set}})$$

anteriormente definido, é uma imersão plena, isto é, é fiel, pleno e injetivo em objetos.

Precisamos provar que nosso funtor que transforma as coisas em ouro —converte objetos de $\mathscr{C}$ em funtores-hom e morfismos de $\mathscr{C}$ em transformações naturais— faz isso de modo a mergulhar uma cópia isomorfa de $\mathscr{C}$ em $\mathrm{Funt}(\mathscr{C}, \mathbf{Set})$, uma categoria de funtores com valores (imagem) em conjuntos, o ambiente ideal para praticar teoria de funtores, isto é, teoria de categorias.

Demonstração.

(1) Para provar que o Funtor Yoneda é fiel e pleno, devemos mostrar que a sua função induzida (Definição 8.2) é injetora e sobrejetora (uma bijeção).

Consideremos, para todo par (A, B) de objetos de $\mathscr{C}^{op}$, a função induzida

$$\hat{Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Funt}(\mathscr{C},\mathbf{Set})}(\mathrm{Hom}(A, -), \mathrm{Hom}(B, -))$$

que pode ser reescrita como

$$\hat{Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(A, -), \mathrm{Hom}(B, -))$$

em que $\hat{Y}(f\colon A \to B) = Y(f\colon A \to B)$.

[3] É o que as pessoas fazem o tempo todo, por exemplo, no Cálculo: muitas delas determinam facilmente a reta tangente a uma curva, passando em determinado ponto, mesmo sem jamais ter quebrado a cabeça utilizando régua e compasso para resolver problemas sobre "ponto de tangência".

Devemos provar que $\hat{Y}$ é uma bijeção. Mas, para isso, basta agora exibir a função inversa da função $\hat{Y}$, que é precisamente a função ψ definida no Lema de Yoneda.

(2) Afirmamos que a função ψ definida no Lema de Yoneda é a inversa da função $\hat{Y}$.

Prova.

Observe a função $\hat{Y}$:

$$\hat{Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(A,B) \longrightarrow \mathsf{Nat}(\mathsf{Hom}(A,-),\mathsf{Hom}(B,-))$$

Ela é "parecida" com a função ψ:

$$\psi\colon \mathsf{Nat}(\mathsf{Hom}(A,-),\, F) \longrightarrow F(A)$$

exceto pelo sentido invertido da flecha (domínio e codomínio invertidos) e pela presença de um funtor genérico F ao lado de $\mathsf{Hom}(A,-)$. Para que fiquem mais parecidas e possamos usar o Lema de Yoneda, façamos o seguinte: consideremos $F = \mathsf{Hom}(B,-)$.

Com isso, aplicando em A, obtemos: $F(A) = \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A) = \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(A,B)$.

Assim, por substituição, podemos reescrever $\hat{Y}$ como:

$$\hat{Y}\colon F(A) \longrightarrow \mathsf{Nat}(\mathsf{Hom}(A,-),F)$$

Colocando $\hat{Y}$ e ψ uma ao lado da outra:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\hat{Y}"] \arrow[rr, bend right, "\psi\circ\hat{Y}"'] & \mathsf{Nat}(\mathsf{Hom}(A,-),\, F) \arrow[r, "\psi"] & F(A) \end{tikzcd}$$

O que precisamos fazer? Demonstrar que $\psi \circ \hat{Y} = 1_{F(A)}$.

Então, seja $a_0 \in F(A) = \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$. Ou seja, a_0 é um morfismo em $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$. Consideremos $a_0 = k\colon B \to A$. Temos:

$$(\psi\circ\hat{Y})(a_0) = (\psi\circ\hat{Y})(k) = \psi(\hat{Y}(k)) \overset{def.}{=} \hat{Y}(k)_A(1_A) \overset{def.}{=} \mathsf{Hom}(k,A)(1_A) = 1_A \circ k = k = a_0$$

Assim, $\psi \circ \hat{Y} = 1_{F(A)}$. Note que a primeira igualdade destacada com "def." na expressão acima faz referência à definição da função ψ. A segunda, à definição de $\hat{Y}$.

(2) Agora, precisamos provar que $\hat{Y} \circ \psi = 1_{\mathsf{Nat}(\mathsf{Hom}(A,-),\,F)}$. Consideremos a composição:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Nat}(\mathsf{Hom}(A,-),\, F) \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "\hat{Y}\circ\psi"'] & F(A) \arrow[r, "\hat{Y}"] & \mathsf{Nat}(\mathsf{Hom}(A,-),\, F) \end{tikzcd}$$

Seja $\alpha\colon \mathsf{Hom}(A,-) \longrightarrow F$, isto é, α é uma transformação natural qualquer em $\mathsf{Nat}(\mathsf{Hom}(A,-), F)$.

Temos:

$$(\hat{Y} \circ \psi)(\alpha) = \hat{Y}(\psi(\alpha)) = \hat{Y}(\alpha_A(1_A)) = \hat{Y}(a) \tag{8.6}$$

onde a é um ponto em $F(A) = \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$, isto é, a é um morfismo $B \to A$, digamos $a = f\colon B \to A$. Assim, $\hat{Y}(a) = \hat{Y}(f)$ e $f = \alpha_A(1_A)$.

A função $\hat{Y}$ é a função induzida pelo Funtor Yoneda, por Y, isto significa que

$$\begin{aligned}\hat{Y}(a) = \hat{Y}(f\colon B \to A) &= Y(f\colon B \to A)\\ &= Y(f)\colon Y(A) \to Y(B) \quad \text{(porque } Y \text{ é contravariante)}\\ &= \mathsf{Hom}(f,-)\colon \mathsf{Hom}(A,-) \to \mathsf{Hom}(B,-)\\ &= \mathsf{Hom}(f,-)\colon \mathsf{Hom}(A,-) \to F \quad \text{(porque adotamos } F = \mathsf{Hom}(B,-))\end{aligned}$$

Nosso objetivo é provar que $(\hat{Y} \circ \psi)(\alpha) = \alpha$. Mas como as igualdades (8.6) nos dizem que $(\hat{Y} \circ \psi)(\alpha) = \hat{Y}(a)$, devemos mostrar que

$$\alpha = \hat{Y}(a) = Y(f)$$

A equação $\alpha = Y(f)$ é uma igualdade entre transformações naturais. É essa igualdade que devemos demonstrar agora. Duas transformações naturais são iguais quando todas as suas componentes são iguais.

Observe os diagramas abaixo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "g"'] \\ X \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \mathsf{Hom}(A,A) \arrow[r, shift left, "\alpha_A"] \arrow[r, shift right, "Y(f)_A"'] \arrow[d, "\mathsf{Hom}(A,g)"'] & F(A) \arrow[d, "F(g)=\mathsf{Hom}(B,g)"] \\ \mathsf{Hom}(A,X) \arrow[r, shift left, "Y(f)_X"] \arrow[r, shift right, "\alpha_X"'] & F(X) \end{tikzcd}$$

O da esquerda mostra um morfismo qualquer $g\colon A \to X$ de $\mathscr{C}$. O da direita mostra a ação dos funtores $\mathsf{Hom}(A,-)$ e F sobre g, bem como as componentes das transformações naturais α e $Y(f)$.[4]

[4] Novamente, recordemos que adotamos $F = \mathsf{Hom}(B,-)$; logo, $F(g) = \mathsf{Hom}(B, g)$.

Usando a hipótese de que α e $Y(f)$ são transformações naturais (a comutatividade do diagrama) e avaliando em 1_A, obtemos:

$$\begin{aligned}
[\alpha_X \circ \mathsf{Hom}(A,g)](1_A) &= [\mathsf{Hom}(B,g) \circ \alpha_A](1_A)\\
\alpha_X[\mathsf{Hom}(A,g)(1_A)] &= \mathsf{Hom}(B,g)[\alpha_A(1_A)]\\
\alpha_X(g) &= \mathsf{Hom}(B,g)(f)\\
\alpha_X(g) &= g \circ f
\end{aligned}$$

ou seja, $\alpha_X(g) = g \circ f$. $(*)$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[Y(f)_X \circ \mathsf{Hom}(A,g)](1_A) &= [\mathsf{Hom}(B,g) \circ Y(f)_A](1_A)\\
Y(f)_X[\mathsf{Hom}(A,g)(1_A)] &= \mathsf{Hom}(B,g)[Y(f)_A(1_A)]\\
Y(f)_X(g) &= \mathsf{Hom}(B,g)[\mathsf{Hom}(f,A)(1_A)]\\
Y(f)_X(g) &= \mathsf{Hom}(B,g)(f)\\
Y(f)_X(g) &= g \circ f
\end{aligned}$$

portanto, $Y(f)_X(g) = g \circ f$. $(**)$

De $(*)$ e $(**)$, obtemos: $\alpha_X(g) = Y(f)_X(g) = \hat{Y}(f)_X(g)$, ou seja, $\alpha_X = \hat{Y}(f)_X$, o que implica $\alpha = \hat{Y}(f)$.

Conclusão: $(\hat{Y} \circ \psi)(\alpha) = \hat{Y}(\alpha_A(1_A)) = \hat{Y}(a) = \hat{Y}(f) = \alpha$.
Portanto, $\hat{Y} \circ \psi = 1_{\mathsf{Nat}(\mathsf{Hom}(A,-),\,F)}$. Assim, $\psi = \hat{Y}^{-1}$, ou seja, $\hat{Y}$ é uma bijeção. Logo, Y é fiel e pleno, como queríamos.

(3) Resta apenas verificar que Y é injetivo em objetos, isto é, mostrar que se $A \neq B$ em $\mathscr{C}^{op}$, então $Y(A) \neq Y(B)$ em Funt$(\mathscr{C}, \mathbf{Set})$. É mais fácil, entretanto, supor $Y(A) = Y(B)$ e provar que daí decorre $A = B$.

Consideremos $Y(A) = Y(B)$. Temos:

$Y(A) = Y(B) \iff \mathsf{Hom}(A,-) = \mathsf{Hom}(B,-)$, uma igualdade entre dois funtores. Se $\mathsf{Hom}(A,-)$ e $\mathsf{Hom}(B,-)$ são o mesmo funtor, devem assumir o mesmo valor em um objeto qualquer X de $\mathscr{C}^{op}$. Assim, em particular para $X = A$, temos $\mathsf{Hom}(A,-)(A) = \mathsf{Hom}(B,-)(A)$, o que equivale a $\mathsf{Hom}(A,A) = \mathsf{Hom}(B,A)$, e agora temos uma simples igualdade entre conjuntos. Consideremos $1_A \in \mathsf{Hom}(A,A)$. Como $\mathsf{Hom}(A,A) = \mathsf{Hom}(B,A)$, 1_A é também um morfismo em $\mathsf{Hom}(B,A)$, mas, pela definição de categoria, cada morfismo possui um único objeto domínio, daí $B = A$, como queríamos. $\blacksquare$

8.3 ENTENDENDO O QUE FOI DEMONSTRADO

Façamos um resumo dos resultados obtidos:

(1) A Proposição 7.2 nos diz que entre um funtor Hom$(A, -)\colon \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set** e um funtor qualquer $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set** existe uma única transformação natural $\gamma\colon$ Hom$(A, -) \longrightarrow F$ satisfazendo a "condição inicial" $\gamma_A(1_A) = a_0$, em que a_0 é um ponto fixado em $F(A)$, escolhido arbitrariamente.

Isso tudo acontece no interior de uma categoria de funtores com valores em conjuntos: Funt$(\mathscr{C}, \textbf{Set})$. A transformação natural γ pode ser representada como:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Hom(A,-)}"] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{F}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \textbf{Set} \end{tikzcd}$$

ela é determinada "univocamente" pela escolha do ponto $a_0 \in F(A)$.

(2) O Lema de Yoneda aparece em seguida, como um simples corolário da Proposição 7.2. Ele nos diz que a função que associa uma transformação natural $\beta\colon$ Hom$(A, -) \longrightarrow F$ ao ponto $\beta_A(1_A) \in F(A)$ é uma bijeção, isto é, existem tantas transformações naturais entre Hom$(A, -)$ e F quantos são os pontos em $F(A)$.

(3) Por último, surge a *Imersão-Yoneda*, uma consequência do Lema, que nos diz que o Funtor Yoneda contravariante

$$Y\colon \mathscr{C}^{op} \longrightarrow \text{Funt}(\mathscr{C}, \textbf{Set})$$

é fiel, pleno e injetivo em objetos. Ou seja, Y mergulha uma cópia isomorfa de $\mathscr{C}$ em Funt$(\mathscr{C}$, **Set**$)$. A demonstração consiste basicamente em diminuir a generalidade do Lema de Yoneda, substituindo o funtor arbitrário F por um funtor-hom.

(4) Finalizando esta seção, o que significa dizer que Y é fiel, pleno e injetivo em objetos?

(a) *Injetivo em objetos*: significa que cada objeto A de $\mathscr{C}$ é convertido em um único funtor-hom: Hom$(A, -)$;

(b) *Fiel*: significa que cada morfismo $f\colon A \to B$ de $\mathscr{C}$ é convertido em uma única transformação natural $Y(f)\colon$ Hom$(B, -) \longrightarrow$ Hom$(A, -)$;

(c) *Pleno*: significa que toda transformação natural entre funtores-hom em Funt$(\mathscr{C}, \textbf{Set})$ é a imagem de algum morfismo em $\mathscr{C}$. Ou seja, para objetos A e B, não existem relações (morfismos) entre os funtores Hom$(B, -)$ e Hom$(A, -)$ que não sejam a imagem de relações prévias (morfismos) existentes entre os objetos A e B em $\mathscr{C}$.

Em nosso exemplo envolvendo a representação de grupos como grafos, vimos que um mesmo grupo pode ser desenhado de várias maneiras diferentes: uma para cada conjunto de geradores. Então, essa interpretação dos grupos como grafos não seria, para começar, injetiva em objetos. Em segundo lugar, no caso dos grupos $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle$ e $\langle \mathbb{Z}_5^*, \cdot, 1 \rangle$, representados a seguir

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dr, bend left] & \\
3 \arrow[ur, bend left] & & 1 \arrow[dl, bend left] \\
& 2 \arrow[ul, bend left] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dr, bend left] & \\
3 \arrow[ur, bend left] & & 2 \arrow[dl, bend left] \\
& 4 \arrow[ul, bend left] &
\end{tikzcd}
$$

existem transformações entre esses grafos que não correspondem a morfismos na categoria dos grupos. Há quatro isomorfismos de grafos entre os dois grafos acima, mas só há dois isomorfismos entre $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle$ e $\langle \mathbb{Z}_5^*, \cdot, 1 \rangle$ na categoria dos grupos. O funtor usado para criar esse tipo de representação não é, portanto, "pleno".

8.4 CONSEQUÊNCIA IMEDIATA

Vejamos a consequência imediata mais significativa do Lema e da Imersão-Yoneda:

Corolário 8.2. *Toda transformação natural*

$$\mathit{Hom}(A,-) \longrightarrow \mathit{Hom}(B,-)$$

é dada por composição (suas componentes são obtidas por composição) com um único morfismo $f_0\colon B \to A$ de $\mathscr{C}$. A transformação natural é um isomorfismo se e somente se o morfismo correspondente $f_0\colon B \to A$ é um isomorfismo.
Em outras palavras, $\mathit{Hom}(A,-) \cong \mathit{Hom}(B,-)$ se e somente se $A \cong B$.

Demonstração.

Seja α uma transformação natural entre $\mathsf{Hom}(A,-)$ e $\mathsf{Hom}(B,-)$:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Hom(A,-)}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Hom(B,-)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

O Teorema 8.1 nos diz que a função induzida pelo Funtor Yoneda

$$\hat{Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}^{op}}(A,B) \longrightarrow \mathsf{Nat}(\mathsf{Hom}(A,-), \mathsf{Hom}(B,-))$$

é uma bijeção. Isto significa que para cada morfismo $B \to A$ de $\mathscr{C}$ existe uma única transformação natural $\mathsf{Hom}(A,-) \longrightarrow \mathsf{Hom}(B,-)$, e vice-versa.

Então, α é a imagem por Y de exatamente um morfismo $f_0\colon B \to A$ em $\mathscr{C}$, que, pela Proposição 7.2, é obtido assim: $f_0 = \alpha_A(1_A)$.

Seja $k\colon A \to X$ um morfismo em $\mathscr{C}$.

Consideremos os diagramas abaixo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f_0"] \arrow[dr, "k \circ f_0"'] & A \arrow[d, "k"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{Hom}(A,A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}(A,k)"'] & \mathsf{Hom}(B,A) \arrow[d, "\mathsf{Hom}(B,k)"] \\ \mathsf{Hom}(A,X) \arrow[r, "\alpha_X"'] & \mathsf{Hom}(B,X) \end{tikzcd}$$

O da esquerda mostra os morfismos em $\mathscr{C}$; o da direita, a ação dos funtores $\mathsf{Hom}(A,-)$ e $\mathsf{Hom}(B,-)$ em $k\colon A \to X$, bem como as componentes da transformação natural α.

Usando a comutatividade do diagrama e avaliando em 1_A, obtemos:

$$\begin{aligned} [\alpha_X \circ \mathsf{Hom}(A,k)](1_A) &= [\mathsf{Hom}(B,k) \circ \alpha_A](1_A) \\ \alpha_X[\mathsf{Hom}(A,k)(1_A)] &= \mathsf{Hom}(B,k)(\alpha_A(1_A)) \\ \alpha_X(k) &= \mathsf{Hom}(B,k)(f_0) \\ \alpha_X(k) &= k \circ f_0 \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha_X(k) = k \circ f_0$, com f_0 fixado.

Em resumo, dada uma transformação natural qualquer

$$\alpha\colon \mathsf{Hom}(A,-) \longrightarrow \mathsf{Hom}(B,-)$$

α será a imagem por Y de um único morfismo $f_0\colon B \to A$ (porque Y é pleno e fiel), isto é, $Y(f_0) = \alpha$. Este morfismo f_0 é o valor $\alpha_A(1_A)$, pela Proposição 7.2. Além disso, as componentes de α são definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \alpha_X\colon \mathsf{Hom}(A,X) &\longrightarrow \mathsf{Hom}(B,X) \\ k &\longmapsto \alpha_X(k) = k \circ f_0 \end{aligned}$$

ou seja, cada componente α_X é dada simplesmente por "multiplicação por f_0 pela direita".

Agora, devemos mostrar que se $f_0\colon B \to A$ é um isomorfismo, então α é um isomorfismo.

Já sabemos como as componentes de α são construídas:

$$\begin{aligned} \alpha_X\colon \mathsf{Hom}(A,X) &\longrightarrow \mathsf{Hom}(B,X) \\ k &\longmapsto \alpha_X(k) = k \circ f_0 \end{aligned}$$

Se f_0 é um isomorfismo, definimos:

$$\begin{aligned} \beta_X\colon \mathsf{Hom}(B,X) &\longrightarrow \mathsf{Hom}(A,X) \\ g &\longmapsto \beta_X(g) = g \circ f_0^{-1} \end{aligned}$$

Assim,

$$(\beta_X \circ \alpha_X)(k) = \beta_X(k \circ f_0) = (k \circ f_0) \circ f_0^{-1} = k$$

portanto, $\beta_X \circ \alpha_X = 1_{\mathsf{Hom}(A,X)}$.

Por outro lado,

$$(\alpha_X \circ \beta_X)(g) = \alpha_X(g \circ f_0^{-1}) = (g \circ f_0^{-1}) \circ f = g$$

ou seja, $\alpha_X \circ \beta_X = 1_{\mathsf{Hom}(B,X)}$.

Conclusão: $\beta_X = \alpha_X^{-1}$, ou seja, α_X é um isomorfismo, para todo objeto X de $\mathscr{C}$. Se todas as componentes de uma transformação natural são isomorfismos, então, pela Proposição 7.1, a transformação natural é um isomorfismo natural. Assim,

$$f_0 \text{ é iso} \Rightarrow \alpha \text{ é iso} \Leftrightarrow \mathsf{Hom}(A,-) \cong \mathsf{Hom}(B,-)$$

em outras palavras,

$$A \cong B \Rightarrow \mathsf{Hom}(A,-) \cong \mathsf{Hom}(B,-)$$

Finalmente, vamos mostrar que se $\mathsf{Hom}(A,-) \cong \mathsf{Hom}(B,-)$, então $A \cong B$. (Se dois objetos são isomorfos quando interpretados pelo Funtor Yoneda, isto é, como funtores-hom, são isomorfos na categoria de onde vieram.)

Dizer $\mathsf{Hom}(A,-) \cong \mathsf{Hom}(B,-)$ significa dizer que os funtores $\mathsf{Hom}(A,-)$ e $\mathsf{Hom}(B,-)$ são naturalmente isomorfos, isto é, são objetos isomorfos em $\mathsf{Funt}(\mathscr{C}, \mathbf{Set})$, ou seja, existe uma transformação natural α entre eles que é um isomorfismo:

$$\mathsf{Hom}(A,-) \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathsf{Hom}(B,-)$$

Na Proposição 7.1 mostramos que se α é um isomorfismo natural, então todas as suas componentes são isomorfismos na categoria codomínio (e vice-versa).

Assim, uma componente genérica α_X de α

$$\mathsf{Hom}(A,X) \xrightarrow{\ \alpha_X\ } \mathsf{Hom}(B,X)$$

é um isomorfismo em **Set**, uma função bijetora.

Ora, mas as componentes de α são sempre da forma:

$$\begin{aligned} \alpha_X \colon \mathsf{Hom}(A,X) &\longrightarrow \mathsf{Hom}(B,X) \\ k &\longmapsto \alpha_X(k) = k \circ f_0 \end{aligned}$$

o que significa que cada morfismo $k\colon A \to X$ é transformado por α_X em um único morfismo $\alpha_X(k) = k \circ f_0$. Na categoria $\mathscr{C}$, a situação é a seguinte:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f_0"] \arrow[rr, bend right, "k \circ f_0"'] & A \arrow[r, "k"] & X \end{tikzcd}$$

Pelo resultado que você vai demonstrar a seguir como exercício, se α_X é um isomorfismo, então f_0 é um isomorfismo; logo $B \cong A$ ou $A \cong B$, como queríamos. ■

8.4.1 Exercício

1. Prove a recíproca que ficou pendente, isto é, que se $\alpha\colon \mathrm{Hom}(A,-) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B,-)$ é um isomorfismo natural, então $f_0\colon B \to A$ é um isomorfismo.

(Esboço da prova: Se $\alpha\colon Y(A) \longrightarrow Y(B)$ é um isomorfismo natural, então possui um inverso α^{-1}. Como Y é fiel e pleno, existe um único morfismo $f_0\colon B \to A$ tal que $Y(f_0) = \alpha$. Analogamente, existe um único morfismo $g_0\colon A \to B$ tal que $Y(g_0) = \alpha^{-1}$.
Então, $1_{Y(A)} = \alpha^{-1} \circ \alpha = Y(g_0) \circ Y(f_0) = Y(f_0 \circ g_0)$. Mas $Y(1_A) = 1_{Y(A)}$, ou seja, $Y(1_A) = 1_{Y(A)} = Y(f_0 \circ g_0)$. Como Y é fiel, resulta: $1_A = f_0 \circ g_0$. Um argumento "simétrico" nos mostra que $1_B = g_0 \circ f_0$, donde $g_0 = f_0^{-1}$, isto é, f_0 é um isomorfismo. Logo, $B \cong A$ ou $A \cong B$.[5])

[5] O argumento acima vale para qualquer funtor F fiel e pleno. Cf. (BARR; WELLS, 2012, p. 82).

8.5 YONEDA VS. CAYLEY

Veremos agora um dos sentidos em que a imersão realizada pelo Funtor Yoneda pode ser vista como generalização do Teorema de Cayley para grupos. A demonstração que apresentaremos aqui é desenvolvida no livro de Peter Smith intitulado *Category Theory: A Gentle Introduction* (SMITH, 2018, pp. 225-228).[6]

Antes disso, porém, precisamos aprender a olhar para um grupo como uma categoria! Por exemplo, nosso grupo $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle$. Como faríamos para transformá-lo em uma categoria? É uma ideia meio estranha, mas já fizemos algo parecido antes, quando fomos obrigados a olhar para o grafo terminal como categoria.

Vamos chamar de $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle)$ a categoria determinada pelo grupo $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle$. Ela é fabricada da seguinte maneira:

(1) Terá um único objeto, que podemos batizar como quisermos. Podemos chamar este objeto único de $*$. Assim, a coleção de objetos de $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle)$ será o conjunto unitário $\{*\}$.

(2) Os morfismos de $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle)$ serão os elementos de $\mathbb{Z}_4$! Ou seja, a coleção de morfismos dessa categoria é o conjunto dos inteiros módulo 4!

Veja como esses morfismos podem ser representados: $* \xrightarrow{0} *$, $* \xrightarrow{1} *$, $* \xrightarrow{2} *$ e $* \xrightarrow{3} *$.

(3) Precisamos de uma composição de morfismos. A composição será a operação do grupo! Veja como isso funciona nos exemplos abaixo:

$$* \xrightarrow{\quad 0 \quad} * \xrightarrow{\quad 1 \quad} * = * \xrightarrow{\quad 1 \circ 0 \quad} * = * \xrightarrow{\quad 1 +_4 0 \quad} * = * \xrightarrow{\quad 1 \quad} *$$

$$* \xrightarrow{\quad 2 \quad} * \xrightarrow{\quad 3 \quad} * = * \xrightarrow{\quad 3 \circ 2 \quad} * = * \xrightarrow{\quad 3 +_4 2 \quad} * = * \xrightarrow{\quad 1 \quad} *$$

$$* \xrightarrow{\quad 1 \quad} * \xrightarrow{\quad 3 \quad} * = * \xrightarrow{\quad 3 \circ 1 \quad} * = * \xrightarrow{\quad 3 +_4 1 \quad} * = * \xrightarrow{\quad 0 \quad} *$$

Há poucos casos para analisar. Rapidamente esgotam-se todas as possibilidades. Faça no seu caderno os casos restantes. Responda agora:

(a) Qual é o morfismo-identidade associado ao objeto único $*$?

(b) Valem as leis de identidade para a composição? Vale a lei associativa para a

[6] A propósito, é um livro muito bem escrito e disponibilizado livremente pelo autor em sua página na Internet, *Logic Matters*, que contém uma porção de materiais interessantes sobre Lógica e Teoria de Categorias. Vale a pena conferir:
`http://www.logicmatters.net/categories/` (acesso em 06 de junho de 2018).

composição?

(c) A composição de morfismos, nessa categoria, é comutativa?

(d) Nessa categoria, quais são os morfismos invertíveis?

Uma categoria com um único objeto é chamada às vezes de **monoide** (LAWVERE; SCHANUEL, 2009, p. 164). Portanto, $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle)$ é um monoide. Como todos os morfismos de $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle)$ são invertíveis, trata-se de um monoide muito particular, que pode ser chamado simplesmente de **grupo.** Diremos, entretanto, "categoria determinada pelo grupo $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle$".

Fora da Teoria de Categorias, no contexto da Álgebra, *monoide* é o termo usado para designar uma estrutura formada por um conjunto equipado com uma operação binária associativa que possui um elemento neutro. Talvez o exemplo mais importante de monoide seja o dos números naturais com a adição: $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$. Por que isso é um monoide? Porque é uma estrutura formada por um conjunto ($\mathbb{N}$) equipado com uma operação binária associativa (a adição usual $+$ de números) e um elemento neutro para essa operação (o zero). Um grupo, portanto, é um tipo muito particular de monoide, em que os elementos possuem inverso. Em Teoria de Categorias, porém, nem sempre estamos interessados no fato de que os elementos de um grupo possuem inversos. Por isso, costumamos olhar para o grupo como monoide. Essa é a razão pela qual escrevemos $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle$ para representar o grupo dos inteiros módulo 4 com a adição: muitas vezes só estamos interessados no fato de que a operação é associativa e tem elemento neutro, ou seja, "esquecemos" um pedaço da estrutura de grupo e olhamos o grupo como monoide.

Agora que sabemos olhar para $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle$ como categoria, que tal usarmos o Funtor Yoneda para criar uma cópia isomorfa dessa categoria na categoria de funtores?[7]

A situação seria a seguinte:

$$Y\colon C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle)^{op} \longrightarrow \mathsf{Funt}(C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle), \textbf{Set})$$

Note que apenas trocamos $\mathscr{C}$ por $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle)$ na definição do Funtor Yoneda.

Agora, acompanhe a seguinte conversa imaginária de um professor com um aluno, ambos desenhando coisas no quadro-negro, após uma aula imaginária de Teoria de Categorias:

— *O que o Funtor Yoneda faz? — pergunta o professor.*

— *Transforma as coisas em ouro.*

— *Não, isso é apenas uma metáfora. O que ele faz de verdade?*

[7] Embora não tenhamos desenvolvido o conceito de *subcategoria plena* nesse texto, criar uma cópia isomorfa de uma categoria $\mathscr{C}$ na categoria de funtores Funt($\mathscr{C}$, **Set**) significa recriar $\mathscr{C}$ em Funt($\mathscr{C}$, **Set**) como uma subcategoria plena. Abreviando, dizemos: *mergulhar* $\mathscr{C}$ *em* Funt($\mathscr{C}$, **Set**). (SMITH, 2018, p. 225)

— *Transforma objetos da categoria domínio em funtores-hom.*

— *Certo. E o que ele faz com os morfismos da categoria domínio?*

— *Converte em transformações naturais.*

— *Certo novamente. Mas só há um objeto em* $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle)^{op}$*, que nós batizamos com o nome* $*$*. O que o Funtor Yoneda fará com o asterisco?*

— *Vai virar um funtor Hom*$(*, -)$*.*

— *E o que o Funtor Yoneda faz, por exemplo, com o morfismo* $* \xrightarrow{2} *$?

— *Vira uma transformação natural.*

— *Sim, mas qual?*

— *Posso colocar o 2 antes da flecha?*

— *Sim.*

— *Então, vai virar a seguinte transformação natural:* $Y(2)\colon \mathrm{Hom}(*, *) \longrightarrow \mathrm{Hom}(*, *)$.

— *O que é Hom*$(*, *)$ *nessa sua expressão?*

— *O conjunto de morfismos entre o objeto asterisco na categoria domínio.*

— *Certo. E o que tem aí dentro?*

— *Os elementos de* $\mathbb{Z}_4$*, que viraram morfismos na categoria determinada pelo grupo.*

— *Certo novamente. E o que é* $Y(2)$?

— *Uma função-hom.*

— *Qual função-hom?*

— *Hom*$(2, -)$*.*

— *Qual é o objeto que entra aí, no lugar do traço?*

— *Só tem um.*

— *Então, escreva ele aí.*

— $Y(2) =$ *Hom*$(2, *)$*.*

— *O que essa função-hom faz?*

— *Multiplica por dois pela direita.*

— *Esse grupo é aditivo... Mas fale em termos de categorias, não de grupos.*

— *Vou dar um exemplo então: Hom*$(2, *)(3) = 3 \circ 2 = 3 +_4 2 = 1$*.*

— *Certo. Muito bem. Quantas transformações naturais dessas nós temos?*

— *Tem que usar o Lema de Yoneda?*

— *De preferência.*

— *Bem, o Lema de Yoneda diz que existem tantas transformações naturais entre os funtores-hom quantos são os pontos em Hom$(*,*)$, que nós já sabemos que são quatro.*

— *Certo. O que você acabou de fazer?*

— *Contei as transformações naturais.*

— *Não. O que você fez em termos teóricos?*

— *Como assim?*

— *Você acabou de dar outra prova do Teorema de Cayley!*

Façamos a verificação passo a passo:

(1) Só há um objeto em $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle)^{op}$, o objeto $*$. Então, $Y(*) = \mathsf{Hom}(*, -)$.

(2) Dado um morfismo qualquer em $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle)^{op}$, por exemplo, $* \xrightarrow{\quad 2 \quad} *$, aplicando o Funtor Yoneda, obtemos:

$$\begin{aligned} Y(2\colon * \to *) &= Y(2)\colon Y(*) \longrightarrow Y(*) \\ &= \mathsf{Hom}(2, -)\colon \mathsf{Hom}(*, -) \longrightarrow \mathsf{Hom}(*, -) \end{aligned}$$

Pelo Corolário 8.2, uma componente genérica $Y(2)_X$ dessa transformação natural é definida por:

$$\begin{aligned} Y(2)_X = \mathsf{Hom}(2, X)\colon \mathsf{Hom}(*, X) &\longrightarrow \mathsf{Hom}(*, X) \\ h &\longmapsto \mathsf{Hom}(2, X)(h) = h \circ 2 \end{aligned}$$

Mas só há um objeto em $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle)$, o asterisco! Logo,

$$\begin{aligned} Y(2)_* = \mathsf{Hom}(2, *)\colon \mathsf{Hom}(*, *) &\longrightarrow \mathsf{Hom}(*, *) \\ h &\longmapsto \mathsf{Hom}(2, *)(h) = h \circ 2 \end{aligned}$$

Portanto, em resumo, a transformação natural correspondente ao morfismo 2 é definida por $\mathsf{Hom}(2, *)(h) = h \circ 2 = h +_4 2$, para todo morfismo h de $\mathsf{Hom}(*, *)$, ou seja, para todo morfismo h de $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle)$.

Não há nada de especial com o 2. A discussão que fizemos acima vale para qualquer um dos morfismos de $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}(0, *)(h) &= h +_4 0 = h \\ \mathsf{Hom}(1, *)(h) &= h +_4 1 \\ \mathsf{Hom}(2, *)(h) &= h +_4 2 \\ \mathsf{Hom}(3, *)(h) &= h +_4 3 \end{aligned}$$

Cada uma dessas funções é a *componente única* da transformação natural correspondente a um determinado morfismo da categoria domínio. Essas funções são endomorfismos: são definidas e tomam valores no mesmo conjunto, o conjunto Hom$(*, *)$. Nesse conjunto estão todos os morfismos da categoria domínio, que são os inteiros módulo 4.

Podemos simplificar a notação acima. Em vez de escrever Hom$(2, *)$ vamos escrever simplesmente f_2. Assim, Hom$(2, *)(h) = f_2(h) = h +_4 2$. Com essa convenção, as transformações naturais podem ser escritas simplesmente como:

$$\begin{aligned} f_0(h) &= h +_4 0 = h \\ f_1(h) &= h +_4 1 \\ f_2(h) &= h +_4 2 \\ f_3(h) &= h +_4 3 \end{aligned}$$

Agora, o Lema de Yoneda nos diz que

$$\mathsf{Nat}(\mathsf{Hom}(*, -), \mathsf{Hom}(*, -)) \cong \mathsf{Hom}(*, *)$$

ou seja, o conjunto das transformações naturais entre Hom$(*, -)$ e Hom$(*, -)$ é isomorfo ao conjunto de morfismos Hom$(*, *)$. Em outras palavras o conjunto de funções $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ é isomorfo ao conjunto de morfismos $\{0, 1, 2, 3\}$[8]. Além disso, como vimos, o Funtor Yoneda é fiel e pleno, o que significa que sua função induzida $\hat{Y} = Y : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ é, em particular, injetora; logo, é uma bijeção entre os dois conjuntos.

Por outro lado, o Funtor Yoneda, sendo um funtor, preserva a composição de morfismos. Por exemplo, para os morfismos 2 e 3, temos:

$$Y(2 \circ 3) = Y(3) \circ Y(2) = f_3 \circ f_2$$

E, ainda, $Y(0) = f_0 = 1_{\mathsf{Nat}(\mathsf{Hom}(*,-),\, \mathsf{Hom}(*,-))} = 1_{\{f_0, f_1, f_2, f_3\}}$.

Portanto, considerando a estrutura de grupo que existe na coleção de morfismos da categoria $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle)$ —que é a estrutura de grupo de $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle$— e a estrutura de grupo que existe no conjunto de funções $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ sob a composição de funções, vemos que o Funtor Yoneda é, sob este ponto de vista, um isomorfismo de grupos! **E este é precisamente o conteúdo do Teorema de Cayley.** Devido ao caráter muito particular da categoria domínio (possuir um único objeto e uma estrutura de grupo na coleção de morfismos), sua imersão na categoria de funtores torna-se uma imersão em conjuntos que coincide com a representação de Cayley.

8 Sim, estamos *vendo* isso, mas numa situação completamente geral essa correspondência entre os dois conjuntos não seria tão evidente.

Ou seja, o Funtor Yoneda, usando muito pouco dos seus superpoderes, também consegue reproduzir $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle$ como um subgrupo do grupo simétrico S_4 das permutações em 4 letras! ■

8.5.1 Exercícios

1. Talvez você tenha sentido certo desconforto na última etapa do argumento acima, porque nosso Funtor Yoneda é contravariante, inverte a ordem da composição:

$$Y(2 \circ 3) = Y(3) \circ Y(2) = f_3 \circ f_2$$

Será que isso poderia nos causar problemas se o grupo usado como exemplo não fosse comutativo?

Como $\langle \mathbb{Z}_4, +, 0 \rangle$ é comutativo, valem, evidentemente, as igualdades:

$$Y(3) \circ Y(2) \overset{def.}{=} Y(2 \circ 3) \overset{!}{=} Y(1) \overset{!}{=} Y(3 \circ 2) \overset{def.}{=} Y(2) \circ Y(3)$$

As igualdades destacadas com "def." decorrem da definição do Funtor Yoneda, e as marcadas com "!" decorrem da definição de composição na categoria domínio, isto é, do fato de que $2 \circ 3 = 2 +_4 3 = 1 = 3 +_4 2 = 3 \circ 2$.

Mas se esse grupo não fosse comutativo, teríamos problemas? Por exemplo, a tabela abaixo define um grupo não comutativo:

$\cdot$	e	r	s	t	u	v
e	e	r	s	t	u	v
r	r	e	v	u	t	s
s	s	u	e	v	r	t
t	t	v	u	e	s	r
u	u	s	t	r	v	e
v	v	t	r	s	e	u

Calculando, por exemplo, $Y(s \cdot t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} Y(s \cdot t) &= Y(t) \circ Y(s) \\ Y(v) &= f_t \circ f_s \\ f_v &= f_t \circ f_s \end{aligned}$$

a igualdade $Y(s \cdot t) = Y(v)$ deve-se a $s \cdot t = v$, confira na tabela.

Será mesmo que as funções f_v e $f_t \circ f_s$ são iguais? Testando, por exemplo, em r, obtemos:

$$\begin{aligned}[f_t \circ f_s](r) &= f_t[f_s(r)] \\ &= f_t(r \cdot s) \\ &= f_t(v) \\ &= v \cdot t = s\end{aligned}$$

Por outro lado, $f_v(r) = r \cdot v = s$.

Parece, portanto, que o fato de Y ser contravariante não nos causa problemas.

É claro que esses exemplos servem apenas para que possamos visualizar o caminho a ser adotado em uma demonstração inteiramente geral. Agora que vimos vários exemplos, faça o seguinte:

(a) Ainda no caso da imersão de $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle)$ na categoria de funtores realizada pelo Funtor Yoneda, crie um argumento geral para demonstrar a uma pessoa desconfiada que

$$Y(a \circ b) = Y(b) \circ Y(a) = Y(a) \circ Y(b)$$

ou seja, apesar de ser contravariante, as circunstâncias específicas envolvendo a categoria domínio e o trabalho específico das componentes das transformações naturais $Y(n) = f_n$ acabam tornando sem efeito a propriedade de contravariância de Y, permitindo-nos dizer, como fizemos anteriormente, que, sob determinado ponto de vista, Y é a mesma coisa que um homomorfismo de grupos (um isomorfismo de grupos, em particular), isto é,

$$Y(a \circ b) = Y(a) \circ Y(b)$$

e

$$Y(0) = f_0 = 1_{\{f_0, f_1, f_2, f_3\}}$$

(Dica: $Y(2 +_4 3)(h) = [Y(3) \circ Y(2)](h) = [f_3 \circ f_2](h) = f_3(h +_4 2) = (h +_4 2) +_4 3 = h + (2 +_4 3)$. Agora, faça a mesma coisa só com letras!)

(b) Duas coisas foram decisivas no argumento que você desenvolveu: o fato de que as funções f_n multiplicam sempre pela direita e uma propriedade da operação de grupo, que se traduz em uma propriedade da composição de morfismos em $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle)$. Que propriedade é essa?

2. Se você ainda está sentindo certo incômodo com a contravariância de nosso Funtor Yoneda, mesmo após ter resolvido o exercício anterior, seus problemas acabaram! Acontece que existe o **Funtor Yoneda covariante**, que chamaremos de J, acompanhando a escolha feita no CTCS:

$$J\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Funt}(\mathscr{C}^{op}, \textbf{Set})$$

Para um objeto qualquer C de $\mathscr{C}$, $J(C) = \mathsf{Hom}(-, C)$, o funtor-hom contravariante! (Nos livramos da contravariância na definição de J, mas ela reaparece nos funtores-hom!) Se $f\colon C \to D$ é um morfismo de $\mathscr{C}$ e A é um objeto qualquer de $\mathscr{C}$, então a componente

$$J(f)_A\colon \mathsf{Hom}(A, C) \longrightarrow \mathsf{Hom}(A, D)$$

da transformação natural $J(f) = \mathsf{Hom}(-, f)\colon \mathsf{Hom}(-, C) \longrightarrow \mathsf{Hom}(-, D)$ é definida por

$$\begin{aligned} J(f)_A = \mathsf{Hom}(A, f)\colon \mathsf{Hom}(A, C) &\longrightarrow \mathsf{Hom}(A, D) \\ h &\longmapsto \mathsf{Hom}(A, f)(h) = f \circ h \end{aligned}$$

Tudo isso é apenas a definição do Funtor Yoneda covariante. Agora, faça o seguinte:

(a) Prove que J é fiel, pleno e injetivo em objetos.

(Dica: Observe primeiramente que $(\mathscr{C}^{op})^{op} = \mathscr{C}$, isto é, se invertermos todas as flechas de $\mathscr{C}$, obteremos $\mathscr{C}^{op}$. Invertendo novamente todas as flechas, desfazemos a operação, ou seja, voltamos para $\mathscr{C}$. Logo, se $\mathscr{D} = \mathscr{C}^{op}$, então $\mathscr{D}^{op} = \mathscr{C}$. Use este fato na definição do Funtor Yoneda contravariante Y.)

3. Faça uma demonstração geral do Teorema de Cayley usando o Funtor Yoneda contravariante Y ou o covariante J. A verificação que fizemos anteriormente foi apenas um exemplo usando $C(\langle \mathbb{Z}_4, +, 0\rangle)$. Você deve considerar um grupo abstrato $\langle G, \cdot, e\rangle$, formado por elementos e, g_1, g_2, ..., e depois seguir a linha de raciocínio que empregamos em nosso exemplo. Lembre-se que o primeiro passo é considerar $\langle G, \cdot, e\rangle$ como categoria. Ao fazer essa demonstração, a importância do Lema de Yoneda e de todos os corolários que vimos ficarão mais evidentes, pois agora não poderemos, a título de exemplo, contar o número de transformações naturais (nem mesmo sabemos se G é enumerável ou não, finito ou infinito, etc.).

$* * *$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho mostramos que as categorias pequenas podem ser representadas diretamente na categoria **Set**, usando uma versão adaptada do Teorema de Cayley, que chamamos de *Teorema 1*. Vimos também que este procedimento, que funciona apenas para categorias pequenas, pode ser substituído por um procedimento muito mais geral: representar uma categoria qualquer, pequena ou grande, numa categoria apropriada de funtores com imagem em **Set**, por meio do Funtor Yoneda. E por último vimos que é possível demonstrar o Teorema de Cayley usando o Lema de Yoneda e seus corolários, estabelecendo assim um dos sentidos em que a imersão realizada pelo Funtor Yoneda pode ser vista como uma generalização do Teorema de Cayley.

Ao longo do texto, procuramos apresentar as ideias fundamentais da Teoria de Categorias (categorias, funtores e transformações naturais) sempre de uma maneira construtiva, isto é, introduzindo cada novo conceito a partir de uma discussão prévia em que tal conceito parecesse necessário, em vez de apresentá-lo como se tivesse surgido do nada. Mesmo assim, algumas construções poderão parecer um tanto artificiais aos iniciantes... Como dissemos na apresentação, este trabalho é um atalho que leva o leitor a um ponto elevado do território, com uma vista privilegiada da paisagem. Mas pagamos um preço por utilizá-lo: muitas coisas interessantes que existem no caminho natural que conduz ao Lema de Yoneda são omitidas.

A propósito, o Lema de Yoneda e o Teorema de Cayley aparecem sob a forma de um exercício em *Matemática Conceitual*, o Exercício 8 do Artigo VII, intitulado *O Funtor componentes conexas* (LAWVERE; SCHANUEL, 2009, p. 358). Esperamos que os leitores que nos acompanharam até aqui sintam-se motivados a continuar a caminhada e a atingir esse novo objetivo! (O que será um funtor componentes conexas?)

Fim.

REFERÊNCIAS

ADAMEK, Jirı; HERRLICH, Horst; STRECKER, George E. **Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats**. Edição: Edição eletrônica disponibilizada pelos autores. [S.l.]: Os autores, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 47, 108.

AWODEY, Steve. **Category Theory**. Edição: Oxford University Press. Segunda Edição. [S.l.]: 2010. Citado 2 vezes nas páginas 40, 84.

BARR, Michael; WELLS, Charles. **Category Theory for Computing Science**. Edição: Edição eletrônica disponibilizada pelos autores. [S.l.]: Os autores, 2012. Citado 10 vezes nas páginas 43, 50, 59, 70, 79, 86, 96, 114, 120, 130.

FRALEIGH, John B. **A First Course in Abstract Algebra**. Sétima Edição. [S.l.]: Addison Wesley, 2003. Citado 1 vez na página 87.

FREYD, Peter. **Abelian Categories**. Edição: Edição eletrônica disponibilizada pelo autor. [S.l.]: TAC Reprints, 2003. Citado 1 vez na página 60.

LAWVERE, William; SCHANUEL, Stephen. **Matemáticas Conceptuales: una primera introducción a categorías**. Edição: Edição eletrônica disponibilizada pelos autores. [S.l.]: Tradutor: Francisco Marmolejo, 2009. Citado 8 vezes nas páginas 14, 23, 29, 46, 65, 83, 132, 139.

ROTMAN, Joseph J. **A First Course in Abstract Algebra: with applications**. Edição: Pearson Prentice Hall. Terceira Edição. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2006. Citado 1 vez na página 112.

SMITH, Peter. **Category Theory: A Gentle Introduction**. Edição: Edição eletrônica disponibilizada pelo autor. [S.l.]: O Autor, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 131, 132.